Tentamen Infinitesimaalrekening B

19 januari 2012, 13.30 – 16.30 uur

Maak de opgaven op het uitgereikte papier. Vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in. Zet op het eerste blad het nummer van je werkcollegegroep. Nummers van werkcollegegroepen en namen van werkcollegebegeleiders en studentassistenten:

Groep 1, Wilfred de Graaf, Ori Yudelevich, Kasper Dokter
Groep 2, Sanjay Ramawadh, Lars van den Berg, Julian Lyczak
Groep 3, Maria Salazar Pinzon, Sjaak van Diepen
Groep 4, Arjen Baarsma, Johnston Leow

Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt. Alle opgaven tellen even zwaar. Je hoeft alleen de eerste acht opgaven te maken, deze tellen elk voor tien punten. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 8. Met de negende opgave (bonusopgave) kun je maximaal tien punten extra verdienen, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger dan 10 kan zijn.
Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.

Veel succes!

Opgave 1. We bestuderen de functie $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x,y) = \dfrac{|x| - y^3}{|x| + y^2}$ als $(x,y) \neq (0,0)$. Laat zien dat f continu is in alle punten $(x,y) \neq (0,0)$.
Bestaat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Zo ja, bepaal de waarde; zo nee, leg uit waarom de limiet niet bestaat.

Opgave 2. Stel $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y,z) = 3x^2 - 2y^2z$. Toon aan dat f differentieerbaar is. Bepaal de lineaire benadering van f in het steunpunt $(1,-1,1)$. Bepaal de richtingsafgeleide van f in het punt $(1,-1,1)$ in de richting $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Bereken de vergelijking van het raakvlak in $(1,-1,1)$ aan het oppervlak $3x^2 - 2y^2z = 1$.

Z.O.Z!!!!!!!!

Opgave 3. a. Stel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zijn twee keer continu differentieerbare functies. Schrijf $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Stel $h = g \circ f$.
Druk $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ uit in de partiële afgeleiden van g, u en v. Noem de formules die je krijgt (*) en (**).
b. Kies nu $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = (x^2 + y, x^2 - y)$ en $g(u,v) = u^2 - v^2$. Bereken voor deze f en g: $h(x,y)$, en daaruit $\frac{\partial h}{\partial x}$ en $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$. Bereken daarna alle partiële afgeleiden van u, v en g die in (*) en (**) voorkomen.
Laat door invullen zien dat je formules (*) en (**) in dit voorbeeld kloppen.

Opgave 4. Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door $f(x,y) = 2x^3 + 3y^2 + 6xy$.
Bepaal alle kritieke punten van f. Ga bij elk kritiek punt na of het een lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt is.

Opgave 5. We bekijken de functie $f(x,y,z) = x - y + z$ op het gebied G dat bestaat uit alle punten (x,y,z) met $(x-y)^2 + y^2 + z^2 \leq 2$.
Beargumenteer waarom de functie maximale en minimale waarden (d.w.z. globale extremen) op G moet aannemen.
Bepaal deze maximale en minimale waarden, en ook de punten waar deze waarden worden aangenomen.

Opgave 6. H is het gebied die bestaat uit de punten (x,y) met $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ en $y \geq 0$.
Schets H en bereken $\iint_H y\,dx\,dy$.

Opgave 7. P is de driezijdige piramide met top $(1,0,2)$ en basis de driehoek met hoekpunten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,2,0)$.
Schets P en bereken $\iiint_P x^2 dx\,dy\,dz$.

Opgave 8. A is het deel van de bol met straal $R > 0$ dat bestaat uit alle punten (x,y,z) met $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ waarvoor geldt $z \leq 0$ en $y \leq x$ en $y \geq -x$.
Schets A en bepaal $\iiint_A x\,z\,dx\,dy\,dz$. Geef niet alleen een berekening maar licht deze ook toe.

Bonusopgave: Opgave 9.
We beschouwen een (naar beide zijden oneindig lange) cilinder C met basis een cirkel met straal r, en een bol B met straal $2r$. De straal van de bol is dus twee keer zo groot als die van de cilinder. Verder is gegeven dat het middelpunt van de bol op het oppervlak van de cilinder ligt.
Schets de bol en de cilinder. Bereken de inhoud van het gedeelte van de cilinder dat binnen de bol ligt.