Tentamen Infinitesimaalrekening B

15 maart 2012, 13.30 – 16.30 uur

Maak de opgaven op het uitgereikte papier. Vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in.

Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt. Alle zeven opgaven tellen voor tien punten. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 7.
Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.

Veel succes!

Opgave 1. Stel $n \geq 2$ is een natuurlijk getal. We bestuderen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = \dfrac{x^n}{x^2 + y^2}$ als $(x, y) \neq (0, 0)$ en $f(0, 0) = 0$. Laat zien dat f continu is in alle punten $(x, y) \neq (0, 0)$.
Is f continu in $(0, 0)$? Beantwoord deze vraag voor alle natuurlijke getallen $n \geq 2$.

Opgave 2.
Stel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y) = x^3 - y^2$.
Schets de grafiek van f.
Toon aan dat f differentieerbaar is en bepaal de lineaire benadering van f in het steunpunt $(1, 2)$. Bepaal de richtingsafgeleide van f in het punt $(1, 2)$ in de richting $(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5})$.
Bereken de vergelijking van het raakvlak in $(1, 2)$ aan het oppervlak
$x^3 - y^2 = -3$.

Opgave 3. **a.** Stel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is een twee keer continu differentieerbare functie.
We definiëren $u(x, y) = 2x - y,\ v(x, y) = 2x + y$.
Stel $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$.
Druk $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ en $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$ uit in de partiële afgeleiden van f.
b. Kies nu $f(u, v) = uv$ en bereken $h(x, y)$ en bereken alle eerste en tweede-orde partiële afgeleiden van f en h.
Laat door invullen zien dat de formules voor $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ en $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$ die je in onderdeel **a.** hebt gevonden in dit voorbeeld kloppen.

Z.O.Z!!!!!!!!

Opgave 4. We bekijken de functie $f(x, y, z) = xy - 3z^2$ op het gebied G dat bestaat uit alle punten (x, y, z) met $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.
Beargumenteer waarom de functie maximale en minimale waarden (d.w.z. globale extremen) op G moet aannemen.
Bepaal deze maximale en minimale waarden, en ook de punten waar deze waarden worden aangenomen. Beargumenteer waarom de maximale en minimale waarden van f op G in juist deze punten worden aangenomen en niet ergens anders.

Opgave 5. P is het gebied dat bestaat uit de punten (x, y) zodat $y \geq x - 1$ en $y^2 \leq x + 1$.
Schets P en bereken $\iint_P y\,dx\,dy$.

Opgave 6.
Integreer $f(x, y, z) = y^2$ over de driezijdige piramide met hoekpunten $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$.

Opgave 7.
Het lichaam K bestaat uit de punten (x, y, z) zodat $0 \leq x \leq 1$ en $y^2 + z^2 \leq x^2$ en $z \geq 0$.
Schets K en bepaal $\iiint_K x\,y^2\,z\,dx\,dy\,dz$.
Geef niet alleen een berekening maar licht deze ook toe.