Tentamen Infinitesimaalrekening B

15 maart 2012, 13.30 – 16.30 uur

Beknopte uitwerkingen.

Deze uitwerkingen zijn niet de enig mogelijke!

Opgave 1. De functie is continu buiten (0,0) omdat het een rationale functie is (teller en noemer zijn continu want veeltermen en noemer is niet 0). In (0,0) moeten we $n = 2$ en $n \geq 3$ onderscheiden. Als $n = 2$ is de functie niet continu omdat voor $t \neq 0$ geldt $f(t, 0) = 1$ dus $\lim_{t\to 0} f(t, 0) = 1$. Als $n \geq 3$ geldt voor alle $(x, y) \neq (0, 0)$ $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$ dus $-|x| \leq f(x, y) \leq |x|$. Met de insluitstelling vinden we $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

Opgave 2.
Stel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y) = x^3 - y^2$.
f is differentieerbaar want de partiële afgeleiden bestaan $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ en zijn continu.
De lineaire benadering van f in het steunpunt $(1, 2)$ is $-3 + 3(x - 1) - 4(y - 2) = 3x - 4y + 2$
De richtingsafgeleide van f in het punt $(1, 2)$ in de richting $(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5})$ is $(3, -4) \cdot (\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}) = 5$.
De vergelijking van het raakvlak in $(1, 2)$ aan het oppervlak $x^3-y^2 = -3$ is $(3, -4)\cdot (x - 1, y - 2) = 0$, dit levert $3(x - 1) - 4(y - 2) = 0$ oftewel $3x - 4y = -5$.

Opgave 3. De kettingregel levert $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$. (*)
De productregel geeft $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u}) + -\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial v}) = -(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2})\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + +(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v})\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -2(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$.
b. Als $f(u, v) = uv$ krijgen we $h(x, y) = (2x - y)(2x + y) = 4x^2 - y^2$.
Door invullen vinden we (*) als $-2y = -v + u = -(2x + y) + (2x - y)$, dit klopt; en (**) als $0 = 0$, klopt ook.

Opgave 4. De functie neemt zijn maximale en minimale waarden aan op G omdat de functie continu is en G gesloten en begrensd.
De mogelijke extremen zijn in de kritieke punten van f (alleen 0,0,0) (functiewaarde 0) of de rand van G. Met Lagrange-multiplicatoren krijgen we voor de mogelijke extremen op de rand de volgende vergelijkingen:

$y = 2\lambda x,\ x = 2\lambda y, -6z = 2\lambda z.$
De laatste vergelijking levert $z = 0$ of $\lambda = -3$.
Als $z = 0$ kunnen x en y niet beide nul zijn want we zoeken punten op de rand van G en (0,0,0) ligt niet op de rand van G. Dan krijgen we $y = 4\lambda^2 y$ dus $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ en $x = \pm y$. Dit levert de vier punten $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0)$ met functiewaardes ± 2.
Als $z \neq 0$ moet $\lambda = -3$ en dit levert $x = y = 0$. We krijgen de punten $(0, 0, \pm 2)$ met functiewaarden -12.
Onze conclusie is dat de minimale waarde -12 is, en wordt aangenomen in $(0, 0, \pm 2)$. De maximale waarde is 2 en wordt aangenomen in twee punten $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ en $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

Opgave 5. Het gebied wordt De snijpunten tussen $y = x - 1$ en $y^2 = x + 1$ zijn $(0, -1)$ en $(3, 2)$. Het gebied wordt begrensd door de rechte lijn tussen $(0, -1)$ en $(3, 2)$ en een stuk van een parabool door $(0, -1)$, $(-1, 0)$ en $(3, 2)$ met as de $x - as$.
De integraal kan het makkelijkst worden berekend door eerst over x te integreren en dan over y, we krijgen dan
$\int_{-1}^{2} \int_{y^2-1}^{y+1} y\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} -y^3 + y^2 + 2y\,dy = \frac{9}{4}$.

Opgave 6. De twee schuine zijvlakken van de piramide hebben vergelijkingen $x + y + \frac{1}{2}z = 1$ en $-x + y + \frac{1}{2}z = 1$
We kunnen bv de piramide schrijven als de vereniging van twee piramides P_1 en P_2.
bepaald door de condities: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$, $0 \leq z \leq 2 - 2x - 2y$ en $-1 \leq x \leq 0$, $1 + x \leq y \leq 0$, $0 \leq z \leq 2 + 2x - 2y$.
De integraal van de functie over P_1 is $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2x-2y} y^2 dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2y^2 - 2xy^2 - 2y^3\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(1-x)(1-x)^3 - \frac{2}{4}(1-x)^4 dx = \int_0^1 \frac{1}{6}(1-x)^4 dx = \frac{1}{30}$. De andere integraal levert hetzelfde op. De som is dus $\frac{1}{15}$.
De integraal kan ook met de plakjesmethode waarbij we driehoekige plakjes nemen loodracht op de y-as. De integraal van de functie over één zo'n plakje ter hoogte y is y^2 maal de oppervlakte van het plakje $2(1-y)^2$ (denk eraan dat de top van de piramide $(2, 0, 0)$ is).
We krijgen voor de integraal $\int_0^1 2y^2(1-y)^2\,dy = \frac{1}{15}$.

Opgave 7. Het lichaam is een halve kegel met top in $(0, 0, 0)$, as de $x - as$ en basiscirkel in het vlak $x = 1$. We substitueren cylindercoördinaten $x = x, y = r\cos\phi, z = r\sin\phi$ (bolcoördinaten gaat niet). De bijbehorende Jacobiaan is r en het lichaam wordt gegeven door de ongelijkheden

$0 \le x \le 1,\ 0 \le \phi \le \pi,\ 0 \le r \le x.$
De integraal wordt dus $\int_0^1 \int_0^x \int_0^\pi xr^4 \cos^2\phi \sin\phi d\phi\, dr\, dx = \int_0^1 \int_0^x xr^4\, dr\, dx \cdot \int_0^\pi \cos^2\phi \sin\phi d\phi =$ $\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{5}x^6\, dx = \frac{2}{105}.$
Je kunt de substitutie ook als subsitutie van poolcoördinaten $= r\cos\phi, z = r\sin\phi$ beschouwen.