Tentamen Infi B

10 april 2019, 9.00-12.00

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.
- Schrijf het antwoord op iedere vraag op een apart blad.
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.
- Doe je best om LEESBAAR te schrijven. Onleesbare antwoorden kunnen fout gerekend worden.

Opgave 1 (15 pt)

(a) (10 pt) Zij K de kubus met hoekpunten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,1)$, $(0,1,1)$. Geef een parametrisatie van een pad $\mathcal{C}$ dat over het oppervlak van K loopt, in $(0,0,0)$ begint, via $(0,\frac{1}{4},1)$ loopt en eindigt in $(1,1,1)$.

(b) (5 pt) (Lastige opgave) Zij $C \subset \mathbb{R}^3$ de elliptische cilinder gedefinieerd door $2x^2+y^2=1$. Het vlak $z=ax+by$ snijdt C. Bepaal waarden van a en b waarvoor deze doorsnede een cirkel is.

Opgave 2 (20 pt)

Zij $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{3x^4+y^2}$.

(a) (5 pt) Laat zien dat $f(x,y) \leq x^2+y^2$.

(b) (5 pt) Laat zien dat

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

bestaat en geef de waarde. Je kan onderdeel (a) gebruiken en je hoeft geen ϵ-δ bewijs te geven.

Gegeven is $g(x,y) = x^2+y^2-2x-2y$ en het domein $KC \subset \mathbb{R}^2$, gedefinieerd door $KC = \{x^2+y^2 \leq 9 \,|\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\}$.

(c) (10 pt) Bepaal de minimale en maximale waarde die $g(x,y)$ aanneemt op KC.

Opgave 3 (20 pt)
Zij $H \subset \mathbb{R}^3$ het ijshoorntje

$$H = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1 \;,\; x^2+y^2 \leq 3z^2 \;,\; z \geq 0\}\,.$$

Neem aan dat H een uniforme massaverdeling heeft. Bereken het massamiddelpunt van H. Hint: gebruik bolcoördinaten.

Opgave 4 (20 pt)
Het oppervlak $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ is de vereniging van

$$K = \{(x,y,z) \,|\, z = 1 - x^2 - y^2 \,,\, z \geq 0\}$$

en

$$C = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2 \leq 1 \,,\, z = 0\}\,.$$

Gegeven is het vectorveld:

$$\mathbf{F} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door $\Sigma = K \cup C$, met een naar buiten wijzende normaal:

(a) (10 pt) Rechtstreeks.

(b) (10 pt) Met behulp van de divergentiestelling.

Opgave 5 (25 pt)
De tetraëder (zonder grondvlak) $TZ \subset \mathbb{R}^3$ wordt gedefinieerd door $TZ = TZ_1 \cup TZ_2 \cup TZ_3$, met

$$\begin{aligned} TZ_1 &= \{(x,y,z) \,|\, x+z \leq 1 \,,\, y=0 \,,\, z \geq 0 \,,\, x \geq 0\} \\ TZ_2 &= \{(x,y,z) \,|\, x+y+z = 1 \,,\, x \geq 0 \,,\, y \geq 0 \,,\, z \geq 0\} \\ TZ_3 &= \{(x,y,z) \,|\, y+z \leq 1 \,,\, x=0 \,,\, y \geq 0 \,,\, z \geq 0\} \end{aligned}$$

Gegeven is het vectorveld:

$$\mathbf{G} = z\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + y\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Bereken de flux van $\mathbf{curl}\,\mathbf{G}$ door TZ, met een naar buiten wijzende normaal:

(a) (15 pt) Rechtstreeks.

(b) (10 pt) Met behulp van de stelling van Stokes.