Tentamen Inleiding Kansrekening en Statistiek

18 april 2013

- Elke opgave dient **op een apart blad** ingeleverd te worden.
- Zet **op elk blad** je naam en studentnummer.
- Het gebruik van rekenmachines, het boek, aantekeningen of andere hulpmiddelen is absoluut niet toegestaan.
- Geef telkens een beknopt bewijs van je antwoord of een berekening/toelichting, tenzij duidelijk in de opgave staat aangegeven dat dit niet hoeft.
- **NOTA BENE:** het gebruiken van aparte bladen voor elke opgave met daarop telkens je naam en studentnummer is 10 van de 100 punten waard.

Opgave 1, 30 pt.
De stochasten X en Y hebben gemeenschappelijke kansdichtheid gegeven door:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+y)^3} & \text{als } x > c \text{ en } y > c, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(Hier is $c \geq 0$ een nog nader te bepalen constante.)

(a) Laat zien dat, voor alle $a, b \geq c$:

$$\mathbb{P}(X > a \text{ en } Y > b) = \frac{1}{2(a+b)}.$$

(b) Laat zien dat de cumulatieve verdelingsfunctie van X wordt gegeven door:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2(x+c)} & \text{als } x \geq c, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(c) Wat is de waarde van c?

(d) Zijn X en Y afhankelijk of onafhankelijk?
(Motiveer je antwoord.)

(e) Wat is $\mathbb{E}X$?
(Hint: een verwachting is niet altijd een reëel getal, maar kan ook ongedefinieerd of plus/min oneindig zijn.)

Opgave 2, 30 pt.

Een *tontine* is een soort voorloper van het pensioen, bedacht in 1653 door Lorenzo de Tonti. Het werkt als volgt: de deelnemers aan de tontine betalen elk een inleg van a om mee te mogen doen. Vervolgens wordt er jaarlijks een vast totaal bedrag b ("dividend") uitgekeerd. Het totaal aan dividend is altijd gelijk en wordt verdeeld over de nog in leven zijnde deelnemers. Dus als er in een bepaald jaar nog 100 deelnemers in leven zijn, dan krijgt iedereen dat jaar $b/100$ uitgekeerd. Als iedereen overleden is dan wordt er niet meer uitgekeerd. Lodewijk XIV schreef in 1689 bijvoorbeeld een tontine uit om zijn militaire campagnes te financieren. Hierbij was de inleg 300 livres en de laatst overlevende deelneemster stierf 31 jaar later op 96-jarige leeftijd. Zij kreeg op dat moment jaarlijks 73000 livres uitgekeerd.

Een vorst stelt een tontine op waarbij de inleg $a = 40$ dukaten is. Hij stuurt zijn soldaten het land in om de ouders van alle n pasgeborenen in zijn rijk over te halen (met lichte dwang waar nodig) hun kind te laten deelnemen aan de tontine. De dividend zal elk jaar $b = n$ dukaten bedragen. Neem aan dat de levensduren van de pasgeborenen gemodelleerd kunnen worden met stochasten $X_1, \ldots, X_n$, die i.i.d. exponentieel verdeeld zijn met parameter λ. De verwachte levensduur is 30 (jaren).

(a) Geef de kansdichtheid van X_1. Wat is de waarde van de parameter λ?
(De antwoorden volstaan hier; een toelichting of berekening is niet nodig.)

De vorst lijdt verlies als één van de pasgeborenen ouder dan 40 wordt. Zijn minister van probabilistische zaken adviseert hem daarom de kansverdeling van de grootheid $M := \max(X_1, \ldots, X_n)$ te bestuderen.

(b) Laat zien dat de cumulatieve verdelingsfunctie van M gelijk is aan $F_M(x) = (1 - e^{-\lambda x})^n$, en bepaal ook de kansdichtheid f_M van M.

Omdat de uitkering van de dividend elk jaar plaatsvindt, bevatten de stochasten $Y_i := \lceil X_i \rceil$ alle voor de vorst relevante informatie. (De notatie $\lceil x \rceil$ betekent "rond x naar boven af".) We gaan er voor het gemak van uit dat onze nieuwgeboren op nieuwjaarsdag geboren zijn (op 1 januari om 00:00:01) en dat de uitbetaling aan het eind van elk jaar (op 31 december om 23:59:59) gebeurt.

(c) Laat zien dat Y_i een geometrische verdeling heeft, en bepaal de parameter p.

(d) Een discrete stochast Y is *geheugenvrij* als $\mathbb{P}(Y > a+b | Y > a) = \mathbb{P}(Y > b)$ voor alle $a, b \in \mathbb{N}$.
Laat zien dat Y_i geheugenvrij is.

(e) Laat Y een stochast zijn die alleen waarden in $\mathbb{N}$ aanneemt en geheugenvrij is.
Laat zien dat Y een geometrische verdeling heeft.

Het eerste jaar waarin de vorst geen dividend meer hoeft uit te keren is $M' := \max(Y_1, \ldots, Y_n)$

(f) Laat zien dat $\mathbb{P}(M' \leq k) = (1 - e^{-\lambda k})^n$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.
(Hint: gebruik onderdeel (b).)

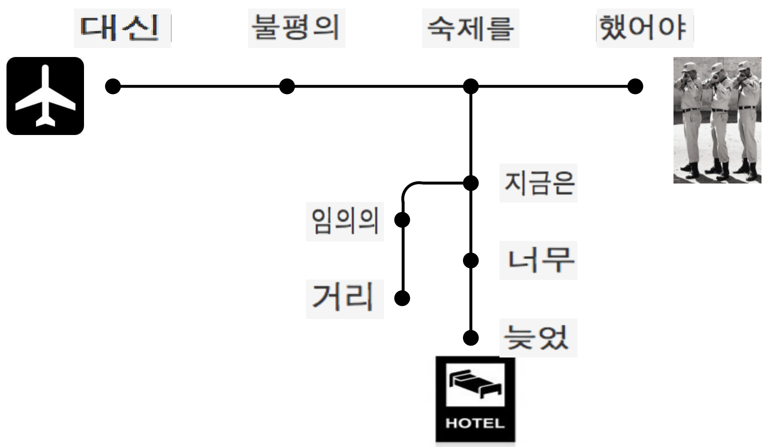
De soldaten konden het niet over hun hart verkrijgen om dwang toe te passen, en daarom hebben ze slechts $n = 2$ families weten te overtuigen hun pasgeborene mee te laten doen.

(g) Laat zien dat in dat geval, voor alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(M' = k) = 2e^{-\lambda(k-1)} - 2e^{-\lambda k} - e^{-2\lambda(k-1)} + e^{-2\lambda k}.$$

(h) Wat is, nog steeds onder aanname dat $n = 2$, de verwachte winst van de vorst?
(Aangezien de vorst veel betere medische zorg tot zijn beschikking heeft, mogen we aannemen dat hij deze 2 onderdanen zal overleven ookal is hij al een stuk ouder.)
(**Nota bene/Hint:** Je mag hier zonder bewijs gebruiken dat voor alle $-1 < x < 1$ geldt: $\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = 1/(1-x)^2$.)

Opgave 3, 30 pt.
Een wiskundestudente is op vakantie in de hoofdstad van een ver land met een totalitair regime. Vlak bij haar hotel bevindt zich een metrostation en ze besluit op de laatste dag van haar vakantie met de metro naar het vliegveld te reizen. De plattegrond van het metronetwerk ziet er als volgt uit:



(De vette stippen stellen de haltes voor.)

Omdat ze de taal niet begrijpt, lukt het haar niet een kaartje te kopen bij de automaat en ze gaat dus maar zonder kaartje op stap (ze is aan de late kant en niet al te eerlijk aangelegd). Wat ze niet weet, is dat op één van de stations zich controleurs bevinden die alle kaartjes controleren en zwartrijders ter plekke fusilleren.

Het is zo druk dat ze bij elke halte door een grote mensenmassa wordt meegetrokken de metro uit en een willekeurige andere metro in. (Behalve op het vliegveld en op de halte met de controleurs. Op vliegveld herkennen de mensen van KLM haar omdat ze een "frequent flyer" is en trekken ze haar uit de mensenmassa. Op de halte met de controleurs trekken de controleurs haar uit de massa om haar kaartje te controleren.) De nieuwe metro gaat met gelijke kans naar elk van de aangrenzende stations.

(a) Stel een stelsel vergelijkingen op dat de kans beschrijft dat de studente heelhuids op het vliegveld aankomt als ze op een gegeven station begint.
(Op de kaart is aangegeven bij welke haltes het hotel, het vliegveld en de controleurs zich bevinden. De controleurs worden voorgesteld door het plaatje met het vuurpeloton.)
(**Nota bene:** een toelichting is hier niet nodig.)

(b) Los dit stelsel op. Wat is de kans dat de studente heelhuids op het vliegveld aankomt?

Helaas heeft de studente haar dag niet en wordt ze gepakt door de controleurs. Voordat ze door het vuurpeloton wordt gefusilleerd mag ze nog een laatste wens doen. Ze heeft nog honderd eenheden van de lokale valuta op zak en ze vraagt om net zo lang telkens één eenheid van de lokale valuta in te zetten op "kop"bij een worp met een munt (bij verlies is ze haar inzet kwijt, bij winst krijgt ze haar inzet plus één eenheid van de lokale valuta van de controleurs) totdat ze al haar geld kwijt is. Ze heeft toevallig nog een Belgische euromunt bij zich en het lukt haar de controleurs over te halen om deze munt te gebruiken voor het spel. (Omdat de studente een bepaald boek over kansrekening en statistiek heeft gelezen weet ze dat bij Belgische euromunten de kans op kop 0.51 is in plaats van precies 1/2.)

(c) De controleurs hebben samen N eenheden van de lokale valuta op zak. Laat zien dat de kans dat de studente al het geld van de controleurs weet te bemachtigen gelijk is aan $\frac{1-(49/51)^{100}}{1-(49/51)^{N+100}}$.
(De controleurs staan haar niet toe de Belgische euromunt of eventuele andere buitenlandse valuta die ze bij zich heeft om te wisselen tijdens het spel.)

Het totalitaire regime straft zeer streng, maar zorgt altijd dat de laatste wens van een ter dood veroordeelde wordt ingewilligd. Mocht de studente al het geld van de controleurs winnen, dan zullen dezen naar de nationale bank gaan om meer geld te halen. En, mocht ze al het geld van de bank winnen, dan zullen er meer bankbiljetten worden gedrukt om toch door te kunnen spelen.

(d) Wat is de kans dat de studente nooit gefusilleerd zal worden?
(Hint: Gebruik onderdeel (c). Je mag zonder bewijs gebruiken dat als $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ een stijgende rij eventualiteiten is, dan is $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Je mag in plaats daarvan ook gebruiken dat als $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ een dalende rij eventualiteiten is, dan is $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.)