Hertentamen Inleiding Kansrekening en Statistiek

21 augustus 2014

- Elke opgave dient **op een apart blad** ingeleverd te worden.
- Zet **op elk blad** je naam en studentnummer.
- Het gebruik van rekenmachines, het boek, aantekeningen of andere hulpmiddelen is absoluut niet toegestaan. Het is i.h.b. ook absoluut niet toegestaan een telefoon o.i.d. op tafel te hebben.
- Geef telkens een beknopt bewijs van je antwoord of een berekening/toelichting, tenzij duidelijk in de opgave staat aangegeven dat dit niet hoeft.
- **NOTA BENE:** het gebruiken van aparte bladen voor elke opgave met daarop telkens je naam en studentnummer is 10 van de 100 punten waard.

Opgave 1. (a: 6pt, b: 6pt, c: 6pt, d: 6pt, e: 6pt).
De stochasten X, Y hebben een gemeenschappelijke kansdichtheid gegeven door de volgende functie:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx & \text{als } 0 < x, y < 1 \text{ en } x + y > 1, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hier is $c > 0$ een nader te bepalen constante.

(a) Geef de waarde van c.

(b) Geef de cumulatieve verdelingsfunctie F_X van X.

(c) Bewijs of weerleg: X en Y zijn onafhankelijk.

Merk op dat er altijd (dwz. met kans 1) een driehoek bestaat met zijdelengtes $X, Y, 2 - X - Y$. (Want er bestaat een driehoek met zijdelengtes $a, b, c > 0$ dan en slechts dan als $a < b + c, b < a + c, c < a + b$.)

(d) Laat Z de hoek zijn van de driehoek (met zijdelengtes $X, Y, 2 - X - Y$) die tegenover de zijde met lengte Y ligt. Laat zien dat de kans dat die hoek groter dan 90 graden is, gelijk is aan:

$$c \cdot \int_0^1 \frac{x^2 - x^3}{2 - x} \mathrm{d}x$$

(*Hint:* Volgens de cosinusregel is $Y^2 = X^2 + (2 - X - Y)^2 - 2 \cdot X \cdot (2 - X - Y) \cdot \cos(Z)$. Dit mag je zonder bewijs gebruiken. Merk verder op dat de hoek groter is dan 90 graden dan en slechts dan als de cosinus negatief is.)

(e) Laat zien dat het antwoord uit **(d)** gelijk is aan $c \cdot \left(\frac{17}{6} - 4\ln(2)\right)$.
Hier is $\ln(.)$ de natuurlijke logarithme, dwz. de inverse van e^x.

Z.O.Z.

Opgave 2. (a: 6pt, b: 6pt, c: 6pt, d: 6pt, e: 6pt).
Laat $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. exponentiële stochasten zijn met parameter $\lambda > 0$.

(a) Laat zien dat als $a > 0$ een constante is, dan heeft $Y_1 := aX_1$ een exponentiële verdeling met parameter λ/a.
(*Hint:* het is voldoende te laten zien dat $\mathbb{P}(Y_1 \leq t) = 1 - e^{-(\lambda/a)t}$ voor alle $t > 0$.)

(b) Laat zien dat $T := \min(X_1, \ldots, X_n)$ ook een exponentiële verdeling heeft, dit maal met parameter $n\lambda$.

(c) Laat zien dat, voor $0 < \alpha < 1$, het interval

$$\left(-\frac{\ln(1-\alpha/2)}{Tn}, -\frac{\ln(\alpha/2)}{Tn} \right),$$

een (exact) betrouwbaarheidsinterval is voor λ met betrouwbaarheid α.
(Hier is ln(.) weer de natuurlijke logarithme.)

(d) Zet nu $Z := X_1 + \cdots + X_n$. Laat zien dat de kansdichtheid van Z gegeven wordt door:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\lambda^n z^{n-1} e^{-\lambda z}}{(n-1)!} & \text{als } z > 0, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(*Hint:* dit kan met inductie en de formule voor de dichtheid van de som van twee onafhakelijke stochasten. Die formule mag je zonder bewijsgebruiken.)

(e) Geef de verwachting en variantie van T en van Z.

Z.O.Z.

Opgave 3. (a: 8pt, b: 8pt, c: 7pt, d: 7pt).
Op een afgelegen eiland middenin de stille oceaan is een gruwelijke moord gepleegd. Er wonen slechts drie mensen op het eiland. (Tot voor kort woonden er vier). Omdat niemand het eiland heeft kunnen verlaten sinds de moord is het zeker dat de moordenaar één van deze drie personen moet zijn.

Een rechercheur en zijn assistent komen naar het eiland om de zaak op te lossen. Daar aangekomen vinden ze een DNA-spoor op de plaats delict dat van de moordenaar moet zijn. Helaas bevat het spoor geen volledig DNA profiel. Van de forensische experts horen de speurders dat het DNA van 50% van alle onschuldige personen zal matchen met het materiaal, terwijl bij vergelijking van het spoor met het DNA van de dader er altijd een match zal optreden.

(a) Stel dat van elk van de drie personen een DNA monster wordt afgenomen en dit wordt vergeleken met het spoor. Laat X het aantal matches zijn. Geef de kansdichtheid van X. (*Hint:* merk op dat X géén nul kan zijn.)

Conform de standaardprocedure bij de politie labelt de rechercheur de drie verdachten volledig willekeurig met de labels A, B, C (dus iedere inwoner heeft gelijke kans om verdachte A te worden, en i.h.b. heeft de dader label A gekregen met kans $1/3$) en hij bestempelt verdachte A tot hoofdverdachte. Hij neemt een DNA monster af bij A laat dit vergelijken met het spoor. Er blijkt een match op te treden.

(b) Wat is de kans dat A daadwerkelijk de dader is, gegeven dat er een match is opgetreden?

Om meer zekerheid te krijgen stuurt de rechercheur zijn assistent erop uit om meer DNA monsters te verkrijgen.

(c) Stel eerst dat de assistent nogal lui is geweest. Hij heeft alleen bij B een DNA monster afgenomen, en er treedt een match op. Wat is de kans dat A de dader is, gegeven dat er een match is met zowel A als B?

(d) Stel nu dat de assistent niet lui is, maar wel erg zuinig ingesteld. Hij neemt zowel bij B als bij C een monster af, maar gebruikt daarbij hetzelfde wattenstaafje. Er treedt een match op, wat in dit geval slechts bewijst dat tenminste één van B en C matcht met het daderspoor. Wat is nu de kans dat A de dader is?