Uitwerkingen van tentamen van 2 juli 2015

Opgave 1a

Ze zijn **afhankelijk**. Want $\mathbb{P}(X > 1, Y < 1) = 0$ terwijl $\mathbb{P}(X > 1) \neq 0$ en $\mathbb{P}(Y < 1) \neq 0$.

Opgave 1b

Er moet gelden dat $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$. Ofwel:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & e^c \cdot \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-y} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ & = & e^c \cdot \int_0^\infty e^{-x} \mathrm{d}x \\ & = & e^c. \end{array}$$

Er volgt $c = 0$.

Opgave 1c

Voor $x \leq 0$ is $F_X(x) = 0$ en voor $x > 0$ is:

$$F_X(x) = \int_0^x \int_t^\infty e^{-s} \mathrm{d}s \mathrm{d}t = 1 - e^{-x}.$$

Voor $y < 0$ is $F_Y(y) = 0$ en voor $y > 0$

$$F_Y(y) = \int_0^y \int_{0^t} e^{-t} \mathrm{d}s \mathrm{d}t = \int_0^y t e^{-t} \mathrm{d}t = 1 - (y+1)e^{-y}.$$

Opgave 1d

We hebben

$$\mathbb{P}(D \leq d) = \int_0^\infty \int_x^{x+d} e^{-y} \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^\infty (e^{-x} - e^{-x-d}) \mathrm{d}x = (1 - e^{-d}) \int_0^\infty e^{-x} \mathrm{d}x = 1 - e^{-d}.$$

Dus F_D is inderdaad de cdf van een exponentiële verdeling met parameter 1.

Opgave 1e

We hebben voor alle $x, d \geq 0$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(X \leq x, D \leq d) & = & \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq X + d) = \int_0^x \int_x^{x+d} e^{-y} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ & = & \int_0^x (1 - e^{-d}) e^{-x} \mathrm{d}x = (1 - e^{-d})(1 - e^{-x}) \\ & = & \mathbb{P}(X \leq x) \mathbb{P}(D \leq d). \end{array}$$

En als $x < 0$ of $y < 0$ dan is $0 = \mathbb{P}(X \leq x, D \leq d) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(D \leq d)$. Dus, gebruikmakend van de hint, zijn X en D inderdaad onafhankelijk (en gelijkverdeeld).

Opgave 2a

Zie Dekking.

Opgave 2b

Zie Dekking. Volgens de CLT ia $\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ (bij benadering) standaard normaal verdeeld, en dus is met kans $\approx 1-\alpha$:

$$\left|\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right|^2 \leq z_{\alpha/2}^2$$

Oftwel (met kans $\approx 1-\alpha$):

$$(1+\frac{z_{\alpha/2}^2}{n})p^2 - (2\overline{X}+\frac{z_{\alpha/2}^2}{n})p + \overline{X}^2 < 0.$$

Oftwel, gebruikmakend van de abc-formule, (met kans $\approx 1-\alpha$) ligt p in het genoemde interval.

Opgave 2c

De expressie $(\frac{1}{2}+\frac{z_\alpha}{2\sqrt{n}}-p)/\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ is dalend in p voor $0<p\leq 1/2$, want: 1) de teller $\frac{1}{2}+\frac{z_\alpha}{2\sqrt{n}}-p$ is dalend in p, en 2) de noemer $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ is stijgend in p voor $0<p\leq 1/2$. Dus is $\Phi\left((\frac{1}{2}+\frac{z_\alpha}{2\sqrt{n}}-p)/\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ dalend in p voor $0<p\leq 1/2$; en is $1-\Phi\left((\frac{1}{2}+\frac{z_\alpha}{2\sqrt{n}}-p)/\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ dan weer stijgend in p voor $0<p\leq 1/2$. Er volgt

$$\sup_{0<p\leq\frac{1}{2}} 1-\Phi\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{z_\alpha}{2\sqrt{n}}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 1-\Phi(z_\alpha) = 1-(1-\alpha) = \alpha.$$

Gebruikmakend van de centrale limiet stelling vinden we

$$\mathbb{P}(T>\frac{1}{2}+\frac{z_\alpha}{2\sqrt{n}}) = \mathbb{P}\left(\frac{T-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} > \frac{\frac{1}{2}+\frac{z_\alpha}{2\sqrt{n}}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \approx 1-\Phi\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{z_\alpha}{2\sqrt{n}}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right).$$

Er volgt dat $\sup_{p\leq 1/2}\mathbb{P}(T>\frac{1}{2}+\frac{z_\alpha}{2\sqrt{n}})\approx\alpha$, zodat we inderdaad een toets voor H_0 met (bij benadering) significantieniveau α te pakken hebben.

Opgave 2d

We kunnen ons dit voorstellen als het maken van een rijtje van $a+b$ genummerde ballen (ofwel een permutatie), waarbij a van de ballen rood zijn. De kans dat de laatste bal rood is is $\frac{a\cdot(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$.

Opgave 2e

Basis: Als $a = 1, b = 0$ dan is het duidelijk dat de gevraagde kans gelijk is aan 1.
Inductiestap: Gegeven $a \geq b \geq 0$ met $(a, B) \notin \{(0,0),(1,0)\}$. Stel de bewering is waar voor alle paren (a', b') met $a' \leq a, b' \leq b, a' \geq b' \geq 0$ en $(a', b') \notin \{(0,0),(a,b)\}$. Laat F de gezochte eventualiteit zijn dat het aantal stemmen voor A op elk moment van de telling hoger is dan het aantal stemmen voor B, en laat E de eventualiteit zijn dat de laatste stem voor A was. Merk op dat $\mathbb{P}(F|E)$ gelijk is aan de kans dat in een stemming met $a-1$ stemmen voor A en b stemmen voor b, het aantal stemmen voor A altijd hoger is. En, op dezelfde wijze is dus $\mathbb{P}(F|E^c)$ gelijk aan de kans dat ik een stemming met a stemmen voor A en $b-1$ stemmen voor b, het aantal stemmen voor A altijd hoger is. Er geldt:

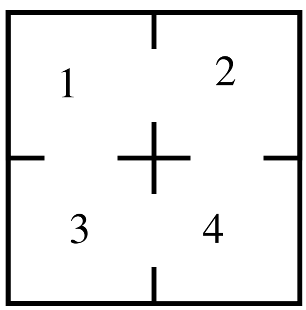
$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F|E^c)\mathbb{P}(E^c).$$

Merk op dat als $b = a$ dan is duidelijk $\mathbb{P}(F) = 0 = \frac{a-b}{a+b}$, en als $b = 0$ dan is duidelijk $\mathbb{P}(F) = 1 = \frac{a-b}{a+b}$. We kunnen zonder beperking der algemeenheid dus aannemen dat $0 < b < a$. Gebruikmakend van de inductiehypothese (en $0 < b < a$) kunnen we dna schrijven:

$$\mathbb{P}(F) = \frac{a-b-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{a-b+1}{a+b-1} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{a(a-b-1) + b(a-b+1)}{(a+b-1)(a+b)} = \frac{(a-b)(a+b-1)}{(a+b-1)(a+b)} = \frac{a-b}{b+a}.$$

Opgave 3a

We nummeren de kamer als volgt:



Het gevraagde stelsel is:

$$\begin{aligned}
e_1 &= 0, \\
e_2 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_4) + 1, \\
e_3 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_4) + 1, \\
e_4 &= \tfrac{1}{2}(e_2 + e_3) + 1.
\end{aligned}$$

De gezochte verwachting is e_4.

Opgave 3b

We hebben de eerste, tweede en derde regel geven: $e_2 = e_3 = \frac{1}{2}e_4 + 1$. Dus de laatste regel geeft nu $e_4 = \frac{1}{2}(e_4 + 2) + 1 = \frac{1}{2}e_4 + 2$. Oftewel $e_4 = 4$. (En $e_2 = e_3 = 3$.)

Opgave 3c

Als $m \leq N$ dan is $\mathbb{P}(M \geq m) = 1$ want we beginnen al met meer vermogen dan m. Als $m > N$ dan is de kans dat $M \geq m$ hetzelfde als de kans dat een gokker, die een startkapitaal van N heeft, een vermogen van m bereikt alvorens hij bankroet gaat. Die kans wordt in de handout uitgewerkt.

Opgave 3d

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{k=\ell}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq \ell).$$

Opgave 3e

Aangezien $p = 18/37$ is $x := \frac{1-p}{p} = \frac{19}{18}$. Aangezien dit groter dan 1 is, volgt dat $x^m > x^N$ voor alle $m > N$. Met de hint volgt dat, voor alle $m > N$, $(x^N - 1)/(x^m - 1) \leq x^{N-m}$. Dus is

$$\sum_{m>N} \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^m - 1} \leq \sum_{m>N} x^{N-m} = \sum_{k=1}^{\infty}(1/x)^k = (1/x) \cdot \frac{1}{1 - 1/x} = \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{1 - \frac{18}{19}} = 18.$$