Universiteit Utrecht — Boedapestlaan 6
Mathematisch Instituut — 3584 CD Utrecht

Inleiding Kansrekening en Statistiek Tentamen, 2015-16

* **Elke opgave dient op een apart blad ingeleverd te worden**.
* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.
* Je mag een eenvoudige rekenmachine gebruiken, het informatie A4tje, de standaard normale tabel en de t-verdeling tabel.
* Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga dan verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.

(1) Stel dat de simultane (gezamenlijke) kansdichtheid van X en Y gegeven wordt door

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{als } 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Laat zien dat de marginale kansdichtheden f_X en f_Y van X en Y gegeven zijn door

$$f_X(x) = \begin{cases} x+1/2 & 0<x<1 \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

en

$$f_Y(x) = \begin{cases} y+1/2 & 0<y<1 \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

(0.5 punten)

(b) Bepaal $\mathrm{Cov}(X,Y)$. (0.5 punten)

(c) Bepaal $P(X+Y>1/3)$. (0.5 punten)

(d) Bepaal $P(XY>1/2)$. (0.5 punten)

(2) (a) Zij X_1, X_2, X_3 onafhankelijke geometrisch verdeelde stochasten met parameter p, en $Z = X_1+X_2+X_3$. Laat zien dat voor $k \geq 3$,

$$P(X_1+X_2+X_3=k) = \frac{1}{2}(k-2)(k-1)p^3(1-p)^{k-3}.$$

(1 punt)

(b) Zij $X_1, X_2, \ldots, X_n$ onafhankelijke stochasten met $E(X_i) = \mu \in (-\infty,\infty)$ en $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \in (0,\infty)$ voor $i = 1, \cdots, n$. Schrijf $\overline{X}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$. Laat zien dat voor alle $a>0$,

$$P\left(n^{1/4}\left|\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma}\right| \geq a\right) \leq \frac{1}{a^2\sqrt{n}}.$$

(1 punt)

(3) Gegeven zijn twee onafhankelijke stochasten X en Y.

(a) Stel dat X en Y standaard normaal verdeeld zijn. Bepaal $P(2X \leq 1-3Y)$. (1 punt)

(b) Stel nu dat X en Y uniform verdeeld op $(0,1)$ zijn. Bepaal $P(Y \geq 2X)$, en $P(Y \geq 2X \mid X+Y \leq 1)$. (1 punt)

(4) Gegeven is een rij $X_1, X_2, \ldots, X_n$ van onafhankelijk gelijk verdeelde stochasten uit een uniforme verdeling op het interval $[-\theta, \theta]$, waarbij θ onbekend is.

(a) Toon aan dat $T = \dfrac{3}{n}(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)$ een zuivere schatter is voor θ^2. (0.5 punten)

(b) Bepaal de *mean squared error* $\mathrm{MSE}(T)$ van T. (1 punt)

(5) Zij $x_1, x_2, \cdots, x_n$ een realisatie (dataset) van n onafhankelijke gelijk verdeelde stochasten $X_1, X_2, \cdots, X_n$. Neem aan dat ieder X_i Poisson verdeeld is met onbekende parameter μ.

(a) Bepaal de maximum likelihood schatting van μ gebasseerd op de data. (1 punt)

(b) Veronderstel dat n voldoende groot is zodat de stochast $\dfrac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}}$ gezien kan worden als standaard normaal verdeeld. Bepaal een 95% betrouwbaarheids interval voor μ gebasseerd op de gegeven data. (1.5 punten)