Universiteit Utrecht | Boedapestlaan 6
Mathematisch Instituut | 3584 CD Utrecht

Inleiding Kansrekening en Statistiek Hertentamen, 2015-16

* **Elke opgave dient op een apart blad ingeleverd te worden**.
* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.
* Je mag een eenvoudige rekenmachine gebruiken, het informatie A4tje, de standaard normale tabel en de t-verdeling tabel.
* Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga dan verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.

(1) We werpen N zuivere dobbelstenen. Hierbij is N een stochastische variabele met $P(N = n) = 2^{-n}$ voor $n \geq 1$. Zij S het aantal geworpen ogen.

(a) Bepaal $P(S = 4 \,|\, N = 2)$. (0.5 punten)

(b) Bepaal $P(S = 4)$. (1 punt)

(c) Bepaal $P(N = 2 \,|\, S = 4)$. (0.5 punten)

(2) Zij $X_1, X_2, \ldots$ een i.i.d. (onafhankelijk gelijk verdeeld) rij Bernoulli stochasten met parameter $0 < p < 1$.

(a) Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} P\Big(X_1 + \cdots + X_n < 3pn\Big) = 1$. (1punt)

(b) Laat zien dat $P\Big(\Big|X_1 + \cdots + X_n - np\Big| \geq np\Big) \leq \dfrac{1-p}{np}$. (0.5 punten)

(c) Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} P\Big(X_1 + \cdots + X_n - np \leq 0\Big) = 1/2$. (0.5 punten)

(3) Stel dat de simultane kansdichtheid van X en Y gegeven wordt door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xe^{-y}}{y^2}, & \text{als } 0 < x < y,\ 0 < y < \infty; \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Laat zien dat Y exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = 1$. (0.5 punten)

(b) Zij $Z = 2Y^2$, bepaal de mediaan van Z. (0.75 punten)

(c) Bepaal de kansdichtheid van Z. (0.75 punten)

(4) Zij $X_1, X_2, \ldots, X_n$ een rij van onafhankelijke gelijk verdeelde continue stochasten met kansdichtheid,

$$f_{X_i}(x) = f(x) = \begin{cases} (p+1)\,x^p, & \text{als } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{anders }, \end{cases}$$

met $p > -1$ onbekend.

(a) Bepaal de maximum likelihood schatting van p gebaseerd op de dataset

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

afkomstig van de stochasten $X_1 X_2, \ldots, X_n$. (1 punt)

(b) Zij $Y_i = \ln X_i$ voor $i = 1, 2, \ldots, n$, en $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Laat zien dat $\overline{Y}_n$ een zuivere schatter voor $q = -(1+p)^{-1}$ is. (0.5 punten)

(5) Zij $X_1, X_2, \ldots, X_n$ een i.i.d. (onafhankelijk identiek verdeeld) rij met X_i uniform verdeeld op $[0, \theta]$, met θ onbekend. Beschouw de steekproefgrootheid $M = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Voor $\alpha \in (0, 1)$, laat zien dat $L_\alpha = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}\theta$ en $R_\alpha = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}\theta$ voldoen aan

$$P(M \leq L_\alpha) = P(M \geq R_\alpha) = \frac{\alpha}{2}.$$

(0.75 punten)

(b) Laat zien dat

$$P\Big(\Big(\frac{2}{2-\alpha}\Big)^{1/n} M < \theta < \Big(\frac{2}{\alpha}\Big)^{1/n} M\Big) = 1 - \alpha.$$

(0.75 punten)

(c) Zij $x_1, x_2, \ldots, x_n$ een dataset afkomstig van $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Bepaal een 95% betrouwbaarheidsinterval voor $\ln(\theta)$. (0.5 punten)

(d) Hoe groot moet n zijn zodat het 95% betrouwbaarheidsinterval voor $\ln(\theta)$ in onderdeel (c) ten hoogste lengte 0.1 heeft. (0.5 punten)