Hertentamen Inleiding Kansrekening en Statistiek
20 april 2017, 13.30-16.30

- Laat duidelijk zien hoe je aan je antwoorden bent gekomen.
- Maak alle opgaven op een apart blad.

---

1. (10 pt) A, B en C zijn kansgebeurtenissen.
   Hypothese: Als A en B onafhankelijk zijn en B en C zijn ook onafhankelijk, dan zijn A en C onafhankelijk.

   Geef een bewijs van bovenstaande Hypothese, of geef een tegenvoorbeeld.

2. (25 pt) X en Y zijn continue kansvariabelen met een gezamenlijke kansverdeling:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2+y), & \text{als } 0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$$

   (a) (5 pt) Bepaal de kansdichtheid $f_X(x)$ van X en $f_Y(y)$ van Y.

   (b) (10 pt) Bereken $P(X+Y \leq \dfrac{3}{2})$.

   (c) (10 pt) Bereken $Cov(X,Y)$.

3. (25 pt) We beschouwen een willekeurig gekozen voetbalwedstrijd uit de Champions League. Zij E het aantal doelpunten dat in de eerste helft valt en T het aantal doelpunten dat in de tweede helft valt. Het is bekend dat E en T onafhankelijke kansvariabelen zijn en dat ze allebei een $Pois(\lambda/2)$ verdeling hebben.

   (a) (5 pt) Geef de verdeling van $W = E + T$, het totaal aantal doelpunten in de wedstrijd. Je mag verwijzen naar een stelling in het boek.

(b) (10 pt) Neem aan dat n en k gehele getallen zijn met $n \geq k$. Laat zien dat

$$P(E = k \text{ en } T = n-k) = \frac{(\lambda/2)^n e^{-\lambda}}{k!(n-k)!}.$$

(c) (10 pt) Bepaal, bij een gegeven waarde van n, voor elke waarde van $k \leq n$

$$P(E = k \mid W = n).$$

Hint: $P(E = k \text{ en } W = n) = P(E = k \text{ en } T = n-k)$.

4. (20 pt) De discrete kansvariabelen X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ zijn onderling onafhankelijk en hebben allen de verdeling

$$P(X_i = k) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & \text{als } k = 1, 2, \ldots, N. \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$$

De waarden van X_i zijn dus uniform verdeeld over $\{1, 2, \ldots, N\}$. Als N niet bekend is, willen we een schatting maken op basis van gegevens $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zij $S_n = (X_1 + X_2 + \ldots X_n)$.

(a) (5 pt) Bepaal $E[X_i]$.

(b) (5 pt) Construeer een zuivere schatter E voor N, op basis van S_n.

(c) (10 pt) Bepaal de Maximum Likelihood Estimator voor N.

5. (20 pt) Zij M_i, $i = 1, \ldots, n$, een aantal kansvariabelen waarvoor geldt: $M_i = c + U_i$. Hierbij is c een constante en U_i zijn i.i.d. kansvariabelen met $E[U_i] = 0$ en $Var[U_i] = 1$.

(a) (10 pt) Gebruik de ongelijkheid van Chebyshev om de minimale waarde van n te bepalen zodat je 90% zeker bent dat $|\overline{M}_n - c| < 0,2$. Hierbij is $\overline{M}_n = (M_1 + \ldots + M_n)/n$.

(b) (10 pt) Beantwoord dezelfde vraag als bij (a), maar maak nu gebruik van de centrale-limietstelling. NB: $P(|Z| < 1,645) = 0,9$ als Z een $N(0,1)$ verdeelde kansvariabele is.