Anwoorden 1e deeltentamen Inleiding Kansrekening en Statistiek (WISB161)
2017-2018
14 december 2017

Opgave 1 Zij X een discrete stochastische variabele op de uitkomstenruimte $\Omega = \{0, 1, 2\}$ met $p(k) = P(X = k) = \frac{2^k}{7}$ voor alle $k \in \Omega$ en cumulatieve dichtheidsfunctie $F(x)$.

a 5pt) Bereken de verwachtingswaarde van X.
ANTWOORD: $E(X) = \frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{2}{7} \cdot 1 + \frac{4}{7} \cdot 2 = \frac{10}{7}$.

b 5pt) Bereken de variantie van X.
ANTWOORD: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \left(\frac{10}{7}\right)^2$.
$E(X^2) = \frac{1}{7} \cdot 0^2 + \frac{2}{7} \cdot 1^2 + \frac{4}{7} \cdot 2^2 = \frac{18}{7}$
Dus $Var(X) = \frac{18}{7} - \left(\frac{10}{7}\right)^2 = \frac{126}{49} - \frac{100}{49} = \frac{26}{49}$.

c 5pt) Bepaal zowel $F(1)$ als $F(\frac{3}{2})$.
ANTWOORD: $F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$.
$F(\frac{3}{2}) = P(X \leq \frac{3}{2}) = P(X \leq 1) = F(1) = \frac{3}{7}$.

Opgave 2 Stel dat twee stochastische variabelen een gezamenlijke kansdichtheidsfunctie hebben gegeven door

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{8}(x + y)^2 \quad \text{als } -1 \leq x, y \leq 1$$

en $f(x, y) = 0$ daarbuiten.

a 5pt) Bepaal de marginale dichtheid $f_Y(y)$.
ANTWOORD: $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx f_{X,Y}(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} dx \frac{3}{8}(x + y)^2 = \frac{3}{8}\frac{1}{3}(x + y)^3|_{-1}^{1} = \frac{1}{8}\left((1 + y)^3 - (-1 + y)^3\right) = \frac{1}{8}\left(1 + 3y + 3y^2 + y^3 - (-1 + 3y - 3y^2 + y^3)\right) = \frac{1}{8}(2 + 6y^2) = \frac{1}{4}(1 + 3y^2)$ als $|y| \leq 1$, en $f_Y(y) = 0$ als $|y| > 1$

b 5pt) Bepaal de verwachtingswaarde van Y.
$E(Y) = \int\limits_{-1}^{1} y\frac{1}{4}(1 + 3y^2)dy = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}y^4\right)|_{-1}^{1} = 0$, of gebruik een symmetrie-argument om dit antwoord te vinden.

c 5pt) Bepaal de voorwaardelijke dichtheid $f_X(x|Y = y)$ als $-1 \leq y \leq 1$.
ANTWOORD: $f_X(x|Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 0 & \text{als } |x| > 1 \\ \frac{3}{2}\frac{(x+y)^2}{1+3y^2} & \text{als } |x| \leq 1 \end{cases}$

d 5pt) Bepaal de covariantie $Cov(X, Y)$.
ANTWOORD: $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - 0 \cdot 0 = E(X, Y)$.
$E(XY) = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1} dy \frac{3}{8}(x + y)^2 xy = \frac{3}{8}\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1} dy(x^3y + 2x^2y^2 + xy^3) = \frac{3}{8}\int\limits_{-1}^{1} dx\ \frac{1}{2}x^3y^2 + \frac{2}{3}x^2y^3 + \frac{1}{4}xy^4\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{8}\int\limits_{-1}^{1} dx \frac{4}{3}x^2 = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} dx x^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}x^3|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$.
Dus $CovX, Y) = \frac{1}{3}$.

e 5pt) Zijn X en Y onafhankelijk? Licht je antwoord toe.
ANTWOORD: Nee, als X en Y onafhankelijk, dan is $Cov(X, Y) = 0$.

Opgave 3 In een vaas zitten 6 rode, 6 witte en 6 blauwe ballen.

a 6pt) Stel je trekt 8 ballen zonder teruglegging. Wat is de kans dat je minstens 1 blauwe bal trekt?
ANTWOORD: $P(\text{minstens 1 blauw}) = 1 - P(\text{geen blauw}) = 1 - \frac{12}{18}\frac{11}{17}\frac{10}{16}\frac{9}{15}\frac{8}{14}\frac{7}{13}\frac{6}{12}\frac{5}{11}$
$= 1 - \frac{5}{17 \cdot 2 \cdot 13} = 1 - \frac{5}{442} = \frac{437}{442}$.

b 5pt) Op hoeveel verschillende manieren kun je i rode, j witte en k blauwe ballen op volgorde leggen?
ANTWOORD: Je kunt $(i+j+k)$ verschillende ballen op $(i+j+k)!$ manieren op volgorde leggen. Je kunt i ballen op $i!$ manieren op volgorde leggen, en omdat de volgorde van de rode ballen niet uitmaakt, moet je door $i!$ delen, idem moet je ook delen door $j!$ en $k!$. Het antwoord is daarom $\frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}$.

c 9pt) Stel je trekt 4 ballen met teruglegging. Wat is de kans dat je meer blauwe ballen dan witte ballen trekt?
ANTWOORD: Vanwege symmetrie geldt: $P(\text{meer wit dan blauw}) = P(\text{meer blauw dan wit})$.
Tevens geldt:
$1 = P(\text{meer wit dan blauw}) + P(\text{meer blauw dan wit}) + P(\text{evenveel wit en blauw})$.
Hieruit volgt: $P(\text{meer blauw dan wit}) = \frac{1}{2}(1 - P(\text{evenveel wit en blauw}))$.

$P(\text{evenveel wit en blauw}) =$
$P(\text{0 wit, 0 blauw, 4 rood}) + P(\text{1 wit, 1 blauw, 2 rood}) + P(\text{2 wit, 2 blauw, 0 rood}) =$
$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \frac{4!}{0!0!4!} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \frac{4!}{1!1!2!} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \frac{4!}{2!2!0!} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 (1 + 12 + 6) = \frac{19}{81}$.

Hieruit volgt $P(\text{meer blauw dan wit}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{19}{81}\right) = \frac{31}{81}$.

Opgave 4 Bij het spel "mens-erger-je-niet" mag een speler zijn eerste pion pas in het spel brengen als hij een 6 gooit met een standaard, zeskantige, dobbelsteen.

a 5pt) Met welke verdeling kun je het aantal dobbelsteenworpen tot je de eerste 6 gooit beschrijven? Geef de kansfunctie van deze verdeling.
ANTWOORD: De geometrische verdeling met parameter $p = \frac{1}{6}$.
$P(X = i) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$ voor $i \in \mathbb{Z}^+$.

b 5 pt) Wat is de kans dat je de eerste 4 worpen geen zes gooit?
ANTWOORD: $P(\text{4 keer geen zes gegooid}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

c 5 pt) Stel dat je de eerste 4 keer geen zes hebt gegooid. Wat is de kans dat je pas bij de 10$^{\text{e}}$ worp een 6 gooit als je weet dat je bij de eerste 4 worpen geen zes hebt gegooid?
ANTWOORD: De geometrische verdeling is geheugenloos, dus
$P(\text{pas bij10e keer een zes} \mid \text{eerste 4 keer geen zes}) = P(\text{bij 6e keer eerste zes gegooid}) =$
$\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5$.

Opgave 5 Zij Ω een uitkomstenruimte en A en B elementen van Ω

a 8pt) Stel dat $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Wat weten we nu over de voorwaardelijke kans $P(A|B)$? Met andere woorden, geldt nog steeds dat $P(A|B)$ alle elementen van $[0,1]$ kan aannemen of weten we meer?
ANTWOORD: Strikt genomen zijn A en B elementen van Ω en geen deelverzamelingen.
Ik reken het ook goed als je A en B hebt geïnterpreteerd als deeleverzamelingen˙ Als A en B elementen van Ω zijn, dan geldt of A en B zijn de enige twee elementen of $A = B$. Als $A = B$ dan geldt $P(A|B) = 1$. Als A en B verschillende elementen zijn, dan geldt: $P(A|B) = 0$, dus $P(A|B)$ kan nog maar twee uitkomsten hebben.

Als A en B deelverzamelingen zijn geldt: Stel $A = B$, dan $P(A|B) = 1$.
Stel $A = B^c$, dan $P(A|B) = 0$. Het lijkt erop dat er geen beperkingen zijn. Dit kan geformaliseerd worden.
Zij $p \in [0,1]$, $X \sim U(0,1)$ en $A = (0, \frac{1}{2})$ en $B = (\frac{1}{2} - \frac{p}{2}, 1 - \frac{p}{2})$.
Dan geldt $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ en $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}, \frac{1}{2}))/\frac{1}{2} = p$. Dus voor elke $p \in [0,1]$ is er een combinatie van Ω, A en B zodanig dat $P(A|B) = p$. $P(A|B)$ kan dus nog steeds alle elementen van $[0,1]$ aannemen.

b 7pt) Stel $A \subseteq B$ en $0 < P(A) \leq P(B) < 1$. Wat weten we nu over de voorwaardelijke kans $P(A|B)$? Met andere woorden, geldt nog steeds dat $P(A|B)$ alle elementen van $[0,1]$ kan aannemen of weten we meer?
ANTWOORD: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} > P(A)$.