Hugo v.d. Wilt

Kansrekening (WISB 161)
Tentamen

Sjoerd Dirksen

25 juni 2024, 09:00-12:00

Dit tentamen bestaat uit 4 vragen, die in totaal 45 punten en 2 bonuspunten waard zijn. Als het je niet lukt om een onderdeel van een vraag te beantwoorden, dan is het nog steeds mogelijk om de daarop volgende onderdelen te beantwoorden. Schrijf op elk ingeleverd blad jouw naam en studentnummer en nummer de pagina's. Voorzie elk antwoord van een zorgvuldige motivatie. Vereenvoudig jouw antwoorden voor zover mogelijk. Je mag gebruik maken van het dictaat en van de tabellen aan het einde van het tentamen.

Vraag 1 [6 punten]

Jasmijn is bioloog en bestudeert hoe antibiotica-resistentie in een populatie van bacteriën toeneemt. Ze neemt een monster af bij een patiënt en stelt vast dat 10% van de bacteriën een genetische mutatie heeft die een bacterie weerbaarder maakt tegen het veelgebruikte antibioticum A. Er is bekend dat 99% van de bacteriën zonder mutatie gedood worden door een kuur met antibioticum A, tegenover maar 80% van de bacteriën met mutatie. De patiënt neemt een kuur van antibioticum A en vervolgens neemt Jasmijn weer een monster af. Als zij een willekeurige bacterie in het nieuwe monster onderzoekt, wat is dan de kans dat deze een mutatie heeft?

Vraag 2 [10 punten]

Zij

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

de driehoek in $\mathbb{R}^2$ met hoekpunten $(0,0)$, $(1,0)$ en $(1,1)$. Zij (X,Y) een kansvector die uniform verdeeld is in A. Bereken de kansdichtheid en de verdelingsfunctie van X en de kansdichtheid en de verdelingsfunctie van Y. Zijn X en Y onafhankelijk?

Vraag 3 [19 punten]

Annette is voetbalfan en maakt een model voor de uitkomst van een willekeurige wedstrijd tussen haar lievelingsteam, team Oranje, en de aartsrivaal, team DL. De duur van de wedstrijd bestaat uit reguliere speeltijd en uit extra tijd. Zij O het aantal doelpunten dat door team Oranje wordt gescoord in de reguliere speeltijd en D het aantal doelpunten dat door team DL wordt gescoord in de reguliere speeltijd. Annette gaat ervan uit dat O en D onafhankelijk zijn, $O \sim Pois(\lambda)$ en $D \sim Pois(\mu)$.

(a) Motiveer het model van Annette.

(b) Zij $S = O - D$ het doelsaldo. Laat zien dat de moment genererende functie van S gegeven wordt door

$$M_S(t) = e^{\lambda e^t + \mu e^{-t} - (\lambda+\mu)}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Hint: uit de opgaven weten we dat $M_X(t) = e^{\theta(e^t - 1)}$ als $X \sim Pois(\theta)$. Deze uitspraak mag zonder bewijs gebruikt worden.

(c) Laat zien dat de kans p_{gelijk} dat de doelpuntenstand gelijk is na de reguliere speeltijd gegeven wordt door

$$e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2}$$

en laat zien dat

$$p_{\text{gelijk}} \leq e^{-(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2}.$$

(d) De coach van team Oranje wil altijd winnen tegen team DL. Als team DL voor staat of de stand gelijk is na de reguliere speeltijd, dan brengt de coach spits Wout in het veld om een overwinning te forceren. Stel dat $\lambda = 3\mu/4$ en stel dat μ zodanig is dat de kans dat team Oranje na de reguliere speeltijd voor staat gelijk is aan 3/10. Annette gaat ervan uit dat het aantal doelpunten O' van team Oranje in de extra tijd Poisson verdeeld is met parameter $c_W\mu$ als Wout in het veld staat en Poisson verdeeld is met parameter $3\mu/40$ als Wout op de bank blijft. Het aantal doelpunten D' van Team DL in de extra tijd is Poisson verdeeld met parameter $\mu/10$.

Hoe groot moet het "Wout-effect" minimaal zijn (d.w.z., hoe groot moet c_W zijn) om ervoor te zorgen dat Team Oranje de wedstrijd naar verwachting wint, d.w.z., $\mathbb{E}(O - D + O' - D') > 0$?

Vraag 4 [10 punten]

Wiskundestudent Jaap ligt verveeld, met een lege zak chips naast zich, op de bank naar de EK-wedstrijd Kroatië-Turkije te kijken. Er is nog steeds geen doelpunt gescoord. Hij vraagt zich af hoe lang de langste *droogteperiode*, d.w.z., de tijd tussen de start van de wedstrijd en het eerste doelpunt, zal zijn in de toekomstige EK-wedstrijden. Hij gaat uit van n EK-wedstrijden en modelleert de langste droogteperiode door middel van de kansvariabele

$$Y_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i,$$

waarbij $(X_i)_{i\geq 1}$ onafhankelijk en exponentieel verdeeld zijn met parameter 1.

(a) Motiveer het model van Jaap.

(b) Definieer, voor iedere $n \geq 1$, de kansvariabele

$$Z_n = Y_n - \log(n),$$

waarbij log de natuurlijke logaritme is. Zij Z een continue kansvariabele met kansdichtheid

$$f_Z(z) = e^{-z}e^{-e^{-z}}, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Laat zien dat

$$Z_n \xrightarrow{d} Z$$

voor $n \to \infty$.

Hint: lemma 5.15 uit het dictaat kan van pas komen.

(c) (voor 2 bonuspunten) In de statistieken wordt de langste droogteperiode tijdens EK-wedstrijden bijgehouden, maar er wordt alleen gekeken naar wedstrijden waarin gescoord wordt. Hoe zou Jaap zijn model voor deze situatie kunnen aanpassen?

Opmerking: Voor aanvang van het EK in 2024 was het record in deze categorie 119 minuten. Ivan Klasnić scoorde in de wedstrijd de 1-0 in minuut 119 van de wedstrijd Kroatië-Turkije tijdens het EK in 2008. Het mocht niet baten: één minuut later scoorde Turkije de gelijkmaker en won vervolgens de strafschoppenreeks.

Een aantal belangrijke kansverdelingen

Discrete kansverdelingen

Naam	Kansfunctie	Verwachtingswaarde	Variantie
Ber(p)	$\mathbb{P}(X=1)=p=1-\mathbb{P}(X=0)$	p	$p(1-p)$
Binom(n,p)	$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,\ldots,n$	np	$np(1-p)$
Geom(p)	$\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ k\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Pois(λ)	$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$	λ	λ

Continue verdelingen

Naam	Kansdichtheid	Verwachtingswaarde	Variantie
Unif(a,b)	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{als } a<x<b\\ 0 & \text{elders}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exp(λ)	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{als } x>0\\ 0 & \text{elders}\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
N(μ,σ^2)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$	μ	σ^2