Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2008-2009 gegeven door Drs. A.G. Henriques.
Het tentamen is samengesteld/gemaakt door
.

Tweede deeltentamen Functies en Reeksen (WISB211)
13 januari 2009

Opgave 1

[2 pt] Zij ρ de (primitieve) derdemachtswortel van 1 met positief imaginair deel en definieer γ_j : $[0,1] \to \mathbb{C}$ door $\gamma_j(t) := (1-t)\rho^j + t\rho^{j+1}$. Bereken de som van complexe lijnintegralen

$$\sum_{0 \leq j < 3} \int_{\gamma_j} \frac{1}{z} dz$$

Opgave 2

Wat is de convergentiestraal van de reeks $f(x) := \sum_{n \geq 0} n x^n$?

Opgave 3

(Geen bewijs nodig)

a) Wat is de limiet van de functies $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := e^{-(\frac{x}{n})^2}$? Is de limiet uniform op $\mathbb{R}$? Uniform op $\mathbb{R}_{\leq 0} := x \in \mathbb{R} | x \leq 0$? Uniform op $\mathbb{R}_{\geq 0} := x \in \mathbb{R} | x \geq 0$? Uniform op $[-1, 1]$?

b) Wat is de limiet van de functies $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_n(x) := e^{-(x+n)^2}$? Is de limiet uniform op $\mathbb{R}$? Uniform op $\mathbb{R}_{\leq 0}$? Uniform op $\mathbb{R}_{\geq 0}$? Uniform op $[-1, 1]$?

c) Wat is de limiet van de functies $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_n(x) := e^{-(x+\frac{1}{n})^2}$? Is de limiet uniform op $\mathbb{R}$? Uniform op $\mathbb{R}_{\leq 0}$? Uniform op $\mathbb{R}_{\geq 0}$? Uniform op $[-1, 1]$?

Opgave 4

Bewijs dat de reeks

$$f(x) := \sum_{k \geq 0} \sin(e^k x) e^{x-k}$$

een continue functie op $\mathbb{R}$ definieert.

Opgave 5

Wat is de Fourier getransformeerde van de functie $(\cos x)^3$?

Opgave 6

Geef een voorbeeld van een rij van continue functies $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat f_n puntsgewijs naar nul convergeert, maar niet uniform op $\mathbb{R}$ en zodat f_n wel uniform convergeert op $(-\infty, 0] \cup [a, \infty)$ voor iedere $a > 0$.

Opgave 7

Zij $f(x) := \max(\cos(x), 0)$ en zij

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx} \tag{*}$$

de Fourier-reeks van f. Bereken de coëfficienten a_k voor k even. Bereken de coëfficienten a_k voor k oneven, $k \neq \pm 1$. Bereken a_1 en a_{-1}. Convergeert (*) uniform naar f? Bereken de som

$$\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - \frac{1}{8^2-1} + \frac{1}{10^2-1} - \frac{1}{12^2-1} + \dots$$

door $x = 0$ in te vullen in (*).