Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2010/2011 gegeven door Andre Henriques.

Functies en Reeksen (WISB211)
11 november 2010

Opgave 1

De functies $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zijn gegeven door

$$f(x, y, z) := (1 + xy + y^2, z^2 + 4, x^3 + x^4)$$

en

$$g(x, y, z) := (y^2 + 3x - xyz, z + xy + x^4, 1 - x - y - z)$$

Bereken de afgeleide van $f \circ g$ in het punt $(0, 0, 0)$.

Opgave 2

De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0 \\ xy \sin \frac{1}{x} & \text{als } x \neq 0 \end{cases}$$

Voor welke punten (x, y) bestaat de afgeleide $Df(x, y)$ van f? Bereken dan ook de waarde van $Df(x, y)$. Motiveer het antwoord.

Opgave 3

Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, zodat de tweede orde partiele afgeleiden $\partial^2 f/\partial x \partial y$ en $\partial^2 f/\partial y \partial x$ overal bestaan, maar zodat

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

Opgave 4

Bewijs dat ieder continue functie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uniform continu is.

Opgave 5

Bewijs dat de functie

$$f(t) := \int_1^\infty e^{-x^2} x^t dx$$

continu is op $\mathbb{R}$.

Opgave 6

De functies $f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door

$$f_n(x) := \arctan(x - n).$$

Bereken de limieten

$$\lim_{n \to \infty} f_n \qquad \text{en} \qquad \lim_{n \to -\infty} f_n$$

Zijn deze rijen van functies uniform convergent op $\mathbb{R}_{\geq 0}$? leg je antwoord uit.