Proeftentamen Functies en Reeksen, deel 2

Januari 2012, Duur: 3 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam**, en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** (Jan Jitse Venselaar, Wouter Stekelenburg) en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 3 opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1 We beschouwen twee machtreeksen $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ en $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ met respectievelijk als convergentiestralen $R_a, R_b \in [0, \infty]$. We veronderstellen dat $R_a \leq R_b$. De convergentiestraal van de reeks

$$\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n \qquad (*)$$

noteren we met R.

(a) Bewijs dat $R \geq R_a$.

Veronderstel nu eerst dat $R_a < R_b$.

(b) Bewijs dat de machtreeks (*) divergeert voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $R_a < |z| < R_b$.

(c) Bewijs dat $R = R_a$.

Veronderstel nu dat $R_a = R_b$.

(d) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat $R = \infty$ tot de mogelijkheden behoort.

Opgave 2 We beschouwen de 2π-periodieke functie die op het interval $[-\pi, \pi]$ gegeven wordt door

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{als} \quad \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Bereken de complexe Fourier-coëfficiënten $c_k := (\mathcal{F}f)_k$, voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Bereken de reële Fourier-coëfficienten a_k, b_k, voor $k \geq 1$.

(c) Voor welke waarden van $x \in R$ convergeert de Fourier-reeks

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (**)$$

naar $f(x)$?

(d) Wat kunt u zeggen over de limiet van de Fourier-reeks (**) in de overige waarden van $x \in \mathbb{R}$.

(e) We beschouwen een interval $I \subset \mathbb{R}$. Onder welke voorwaarden geldt dat de reeks (**) uniform convergeert op I?

(f) Ook in dit geval geldt de formule van Parseval voor de complexe Fourier-reeks. Formuleer een stelling op grond waarvan dit zo is, en bepaal $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$.

Opgave 3 We beschouwen de Fourier-reeks

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ikx},$$

met $0 < r < 1$.

(a) Toon aan dat de bovenstaande Fourier-reeks uniform convergeert op $\mathbb{R}$ en dat de bijbehorende somfunctie $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continu is en periodiek met periode 2π.

(b) Toon aan dat

$$f_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos x}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(c) Bewijs dat voor alle $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_r(x)\, e^{-ikx}\, dx = r^{|k|}.$$

(d) Formuleer de identiteit van Parseval voor de Fourier-reeks van een functie, en geef daarbij ook aan onder welke voorwaarden deze geldig is.

(e) Bewijs dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos x}\right)^2 dx = \frac{1 + r^2}{1 - r^2}.$$