Uitwerking tweede deeltentamen Functies en Reeksen, 19/1-2012

Opgave 1

(a) Volgens een stelling in het dictaat zijn f en g op D willekeurig vaak differentieerbaar terwijl $c_n = f^{(n)}(0)/n!$ en $d_n = g^{(n)}(0)/n!$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Uit $f = g$ op D volgt ook dat $f^{(n)} = g^{(n)}$ op D, dus $c_n = d_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Voor $z \in D$ geldt dat

$$zf(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} z^n.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}(2+z)f(z) &= 2f(z) + zf(z) = 2c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} z^n \\ &= 2c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2c_n + c_{n-1}) z^n.\end{aligned}$$

(c) Volgens een stelling uit het dictaat is f complex differentieerbaar op D, terwijl voor alle $z \in D$ geldt:

$$\frac{df}{dz}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} z^n.$$

Passen we (b) toe op deze machtreeks, dan vinden we

$$(2+z)\frac{df}{dz}(z) = 2c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2(n+1)c_{n+1} + nc_n) z^n.$$

Anderzijds geldt

$$\lambda f(z) = \lambda c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda c_n z^n.$$

Door vergelijken en toepassing van (a) vinden we dat $\lambda c_0 = 2c_1$ en dat voor $n \geq 1$ geldt dat $2(n+1)c_{n+1} + nc_n = \lambda c_n$. Aangezien $c_0 = f(0) = 1$ volgt hieruit het gevraagde.

(d) Als $\lambda \notin \mathbb{N}$, dan volgt met inductie dat $c_n \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Verder geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{\lambda - n}{2(n+1)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda/n - 1}{1/n + 1}\right|$$

Deze uitdrukking heeft limiet $L = 1/2$ voor $n \to \infty$. Wegens een stelling uit de extra aantekeningen heeft de machtreeks als convergentiestraal $R = 1/L = 2$.

(e) Als $\lambda \in \mathbb{N}$, dan volgt uit de vergelijkingen dat $c_{\lambda+1} = 0$ en dus ook $c_k = 0$ voor alle $k \geq \lambda + 1$. Hieruit volgt dat de coëfficiënten van de machtreeks vanaf zekere index alle gelijk zijn aan nul. De machtreeks convergeert dus voor alle $z \in \mathbb{C}$ en heeft derhalve convergentiestraal ∞.

Opgave 2

(a) Er geldt dat

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

Voor $k = 0$ geeft dit $c_0 = 2s/2\pi = s/\pi$. Voor $k \neq 0$ vinden we

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-s}^{s} e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{-s}^{s} = \frac{\sin ks}{k\pi}.$$

(b) De reële Fourier-reeks van f wordt gegeven door

$$\begin{aligned} c_0 + \sum_{k\geq 1} (c_{-k} e^{-ikx} + c_k e^{ikx}) &= c_0 + \sum_{k\geq 1} \frac{\sin ks}{k\pi} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ &= c_0 + \sum_{k\geq 1} \frac{2 \sin ks}{k\pi} \cos kx. \end{aligned}$$

Hieruit volgt (**) met $a_0 = s/\pi$ en met

$$a_k = \frac{2 \sin ks}{k\pi}, \qquad (k \geq 1).$$

(c) De functie f is stuksgewijs C^1. Zij $x \in [-\pi, \pi]$. Volgens een stelling uit de stof convergeert de Fourierreeks naar $(f(x+) + f(x-))/2$. Deze laatste waarde is gelijk aan $f(x)$ dan en slechts dan als f continu is in x, dus als $x \notin \{-s, s\}$. Er geldt dat $f(-s-) = 0$, $f(-s+) = 1$ en $f(s-) = 1$, $f(s+) = 0$, dus voor $x \in \{-s, s\}$ convergeert de Fourierreeks naar $1/2$.

(d) De Fourierreeks convergeert uniform naar f op het interval $[0, \pi/2]$ indien f continu is op dit interval. Dit is het geval als $s > \pi/2$.

(e) Uit het in (c) gegeven antwoord volgt, door subsitutie van $x = s$, dat

$$\frac{1}{2} = \frac{s}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin ks}{k\pi} \cos ks = \frac{s}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2ks}{k\pi}.$$

Vermenigvuldiging van alle leden met π levert ons de gewenste identiteit.

Opgave 3

(a) Er geldt dat

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) e^{-ikx} \right| dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_{\mathbb{R}}\, dx = \|f\|_{\mathbb{R}}.$$

(b) Laat $s > 0$. Dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ en alle $k \in \mathbb{Z}$ dat

$$|c_k e^{ikx - s|k|}| = |c_k| |e^{ikx}|\, |e^{-s|k|}| = |c_k| e^{-s|k|} \leq \|f\|_{\mathbb{R}} (e^{-s})^{|k|}.$$

Nu is $0 < e^{-s} < 1$, dus de reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} (e^{-s})^k$ is convergent. Wegens het uniforme majorantiecriterium volgt dat de reeks voor f_s uniform absoluut convergent is op $\mathbb{R}$. De termen van de reeks zijn continue en 2π-periodieke functies van x, en de som $f_s(x)$ is dat wegens een stelling dus ook.

(c) De kwadraatintegraalnorm is gedefinieerd door

$$\|f_s - f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_s(x) - f(x)|^2 \, dx.$$

Volgens de stelling van Parseval voor de continue 2π-periodieke functie $f_s - f$ is de bovenstaande uitdrukking gelijk aan

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f_s - f)_k|^2.$$

Volgens een stelling uit het dictaat is $\mathcal{F}(f_s))_k$ gelijk aan de k-de Fouriercoefficient van de reeks voor f_s, dus gelijk aan $c_k e^{-|k|s}$. Hieruit volgt dat $\mathcal{F}(f_s - f)_k = c_k(e^{-|k|s} - 1)$, dus

$$\|f_s - f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k e^{-|k|s} - c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-|k|s})^2 |c_k|^2.$$

(d) Zij $N > 0$. Uit (c) volgt dat

$$\|f - f_s\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{N} (1 - e^{-|k|s})^2 |c_k|^2 + \sum_{|k|>N} (1 - e^{-|k|s})^2 |c_k|^2.$$

Voor $s \downarrow 0$ geldt dat $e^{-|k|s} \to 1$ (voor elke $k \in \mathbb{Z}$). Met de somregel voor limieten volgt dus dat

$$\sum_{k=-N}^{N} (1 - e^{-|k|s})^2 |c_k|^2 \to 0.$$

Er bestaat dus een $\delta > 0$ zo dat voor alle $0 < s < \delta$ geldt dat

$$0 < \sum_{k=-N}^{N} (1 - e^{-|k|s})^2 |c_k|^2 < \frac{1}{N}.$$

Anderzijds is $0 < 1 - e^{-|k|s} < 1$ voor alle k, dus voor $0 < s < \delta$ geldt:

$$\|f - f_s\|_2^2 < \frac{1}{N} + \sum_{|k|>N} |c_k|^2.$$

(e) Uit de ongelijkeid van Bessel voor f volgt dat $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|c_k\|^2 < \infty$. Hieruit volgt dat

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|k|>N} \|c_k\|^2 = 0.$$

Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $\sum_{|k|>N} \|c_k\|^2 < \epsilon/2$ en zo dat $1/N < \epsilon/2$. Wegens (d) is er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $0 < s < \delta$ geldt dat

$$\|f - f_s\|_2^2 < \frac{1}{N} + \epsilon/2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Hieruit vollgt dat $\|f - f_s\|_2^2 \to 0$, dus ook $\|f - f_s\|_2 \to 0$ voor $s \downarrow 0$.

Richtlijn normering

Algemeen: 10 punten per opgave.
Cijfer deeltentamen = totaal /3 afgerond op 1 decimaal nauwkeurig.

Opgave 1

(a) 2

(b) 2

(c) 3: 2 voor het volgen van de juiste methode, 1 voor de afwerking.

(d) 2

(e) 1

Opgave 2

(a) 3: 1 voor c_0 en 2 voor c_k.

(b) 2

(c) 2:

- 1 voor de opmerking dat convergentie wegens een stelling plaats vindt in de continuiteitspunten, en voor de bepaling daarvan.
- 1 voor het juiste antwoord

(d) 1 voor het juiste antwoord

(e) 2: 1 voor invullen van $x = s$ en de juiste methode, 1 voor afwerking.

Opgave 3

(a) 1 punt voor juiste redenering

(b) 3:

- 1 punt voor het inzicht dat men uniform absolute convergentie moet bewijzen
- 1 punt voor het gebruik van uniforme majorantie
- 1 voor de juiste afwerking

(c) 2: 1 voor juiste definitie kwadraatintegraalnorm, 1 voor toepassing Parseval en afwerking.

(d) 2: 1 voor de juiste schatting van elke deelsom.

(e) 2: voor de juiste redenering