Eerste deeltentamen Functies en Reeksen

10 November 2011, 9:00 - 12:00 uur

Uitwerking

Opgave 1 De functie f is partieel differentieerbaar met continue partiële afgeleiden, dus totaal differentieerbaar op $\mathbb{R}^2$. Met de rekenregels voor differentieerbaarheid volgt dat c differentieerbaar is op $\mathbb{R}$. De samenstelling $f \circ c$ is derhalve een differentieerbare functie op $\mathbb{R}$ met afgeleide gegeven door

$$(f \circ c)'(t) = Df(c(t))c'(t).$$

De afgeleide van f wordt gegeven door

$$Df(x, y) = (D_1 f(x, y) D_2 f(x, y)) = 4(1 + x - y + xy)^3 (1 + y \quad x - 1).$$

De afgeleide van c wordt gegeven door $c'(t) = (2t, 1 - 3t^2)$. We merken op dat $c(1) = (1, 0)^{\mathrm{T}}$ en $c'(1) = (2, -2)^{\mathrm{T}}$, dus

$$(f \circ c)'(1) = Df(1, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 32 \cdot (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 64.$$

Opgave 2 Veronderstel dat f een C^2-functie is en dat

$$\text{grad } f\ (x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$$

voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Hieruit volgt dat $D_1 f(x, y) = y$ en $D_2 f(x, y) = x^2$, voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dus

$$D_2 D_1 f(x, y) = 1 \quad \text{en} \quad D_1 D_2 f(x, y) = 2x$$

voor alle $(x, y) \in R^2$. De functie $D_1 2 D_2 f$ is dus niet gelijk aan de functie $D_2 D_1 f$. Anderzijds is f een C^2 functie, dus $D_1 f$, $D_2 f$ en $D_1 D_2 f$ en $D_2 D_1 f$ zijn continu, en hieruit volgt met een stelling dat $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$, tegenspraak.

Opgave 3 Er geldt dat
$$f(x) - f(0) = Df(0)(x) + R(x),$$
voor alle $x \in \mathbb{R}^n$, met
$$\lim_{x \to 0} \frac{|R(x)|}{\|x\|} = 0.$$
We merken op dat $R(0) = 0$. Hieruit volgt dat
$$g(x) - g(0) = Df(0)(x) + R(x) + (x_1 - x_n)\|x\| = Df(0)(x) + r(x),$$
met $r(x) = R(x) + (x_1 - x_n)\|x\|$, voor $x \in \mathbb{R}^n$. Voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ geldt dat $|r(x)| \leq |R(x)| + |x_1 - x_n|\|x\|$, dus
$$\frac{|r(x)|}{\|x\|} \leq \frac{|R(x)|}{\|x\|} + |x_1 - x_n| \leq \frac{|R(x)|}{\|x\|} + 2\|x\|.$$
De laatste uitdrukking heeft limiet 0 voor $x \to 0$ en met de insluitstelling concluderen we dat $\|x\|^{-1}|r(x)| \to 0$ voor $x \to 0$. Aangezien $Df(0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een lineaire afbeelding is concluderen we vanuit de definitie dat g totaal differentieerbaar is in 0 met afgeleide $Dg(0) = Df(0)$.

Opgave 4 (a) Het is een resultaat uit de cursus dat de functie $t \mapsto t^s$ oneigenlijk integreerbaar is over $]0, 1]$ voor $s > -1$. Voor $s = -1/2$ krijgen we in het bijzonder dat de $t \mapsto 1/\sqrt{t} = t^{-1/2}$ oneigenlijk integreerbaar is over $]0, 1]$.

Zij $x \in \mathbb{R}$. De functie $t \mapsto f(x, t)$ is continu op $]0, 1]$, dus lokaal Riemann-integreerbaar. Voor alle $t \in]0, 1]$ geldt dat
$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}},$$
dus $f(x, \cdot)$ is oneigenlijk integreerbaar over $]0, 1]$ wegens het majorantiekenmerk.

(b) De functie f is continu op $\mathbb{R} \times]0, 1]$ en voor alle (x, t) in die verzameling geldt dat $|f(x, t)| \leq 1/\sqrt{t}$. Hieruit volgt met een stelling dat F continu is op $\mathbb{R}$.

(c) De functie f is continu op $\mathbb{R} \times [1, \infty[$. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $t \geq 1$ volgt dat
$$|f(x, t)| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq e^{-t}.$$
De functie $t \mapsto e^{-t}$ is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $[1, \infty[$, dus met een stelling volgt dat door
$$F_1(x) := \int_1^\infty f(x, t)\, dt$$
een continue functie $\mathbb{R} \to [1, \infty[$ gedefinieerd wordt. Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $t \mapsto f(x, t)$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $]0, 1]$ en over $[1, \infty[$, dus over $]0, \infty[$. Bovendien geldt
$$G(x) = \int_0^\infty f(x, t)\, dt = \int_0^1 f(x, t)\, dt \ + \int_1^\infty f(x, t)\, dt = F(x) + F_1(x).$$
Aangezien F en F_1 continu zijn, is G dat ook.

Opgave 5 (a) Zij $x \in \mathbb{R}$ vast. Dan is, voor elke $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \frac{n}{ne^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1/n}.$$

Hieruit volgt dat $f_n(x) \to 1/(e^x + 0) = e^{-x}$ voor $n \to \infty$. De rij (f_n) is derhalve puntsgewijs convergent op $\mathbb{R}$ met limiet f.

(b) Zij $a \in \mathbb{R}$ vast en zij $x \geq a$. Dan geldt dat

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n}{ne^x + 1} - \frac{1}{e^x} \right| = \left| \frac{1}{(ne^x + 1)\, e^x} \right| \leq \frac{1}{n} e^{-2x} \leq \frac{1}{n} e^{-2a}.$$

Voor de supnorm van $f_n - f$ over $[a, \infty[$ geldt dus

$$\| f_n - f \|_{[a,\infty[} \leq \frac{e^{-2a}}{n}.$$

Hieruit volgt dat $\| f_n - f \|_{[a,\infty[} \to 0$ voor $n \to \infty$. We concluderen dat de rij (f_n) op het interval $[a, \infty[$ uniform convergeert naar f.

(c) We zullen aantonen dat de rij (f_n) niet uniform convergeert op $\mathbb{R}$. Stel dat dit wel het geval was. Dan heeft (f_n) een uniforme limiet g. Deze uniforme limiet is tevens puntsgewijze limiet, dus $g = f$, en we zien dat $f_n \to f$ uniform op $\mathbb{R}$. Dus voor de sup-normen geldt: $\| f_n - f \|_{\mathbb{R}} \to 0$ voor $n \to \infty$.

Zij $n \geq 1$. Dan is er een $\xi = \xi_n < 0$ zo dat $e^{\xi} < \frac{1}{n}$. Hiervoor geldt dat $ne^{\xi} + 1 < 2$ en $e^{\xi} < 1$, dus

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| = \frac{1}{(ne^{\xi} + 1)e^{\xi}} \geq \frac{1}{2}.$$

In het bijzonder geldt dus dat $\| f_n - f \|_{\mathbb{R}} \geq 1/2$, voor alle $n \geq 1$. Dit is in strijd met de hierboven afgeleide bewering dat $\| f_n - f \|_{\mathbb{R}} \to 0$.

Richtlijn normering

1a
2: f heeft continue partiele afgeleiden dus is differentieerbaar
1: c is volgens de rekenregels van gewone afgeleiden differentieerbaar
1: $f \circ c$ differentieerbaar wegens kettingregel

1b
2: formule $(f \circ c)'(t) = Df(c(t))c'(t)$, of $(f \circ c)'(1) = Df(c(1))c'(1)$
2: $Df(1,0)$
1: afgeleide $c'(1)$
1: afwerking

2
1: voor idee bewijs uit ongerijmde
3: stel f voldoet, dan $D_1 f = y,\ D_2 f = x^2$.
2: voor de bepaling van $D_2 D_1 f$ en $D_1 D_2 f$.
4: voor de opmerking dat $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$ omdat deze gemengde afgeleiden continu zijn, tegenspraak.

3
3: voor de juiste definitie van differentieerbaarheid
2: voor het uitdrukken van de restterm r voor g in termen van die van f
2: voor het bewijs van $\|x\|^{-1}|r(x)| \to 0$
3: voor de juiste afwerking

4a
2: voor de opmerking dat de functie continu, dus lokaal Riemann integreerbaar
2: voor juiste toepassing majorantie criterium met $1/\sqrt{t}$

4b
2: voor toepassing uniforme majorantie en continuiteit integrand

4c
2: voor splitsing van de integrand
2: voor toepassing uniforme majorantie en continuiteit integrand over $[1, \infty[$.

5a
2: voor correct bewijs puntsgewijze convergentie

5b 1: voor correcte definitie van uniforme convegentie
2: voor uniforme afschatting van $|f_n - f|$ op $[a, \infty[$. 1: voor juiste uitwerking

5c
1: stel uniform convergent, dan uniforme limiet is f 2: voor afschatting sup-norm naar onderen
1: voor afronding redenering