# Uitwerking Eerste deeltentamen Functies en Reeksen

## 8 november 2012, 9:00 - 12:00 uur

**Opgave 1**

(a) Schrijf $v = (v_1, v_2)$. We veronderstellen eerst dat $v_1 \neq 0$. In dat geval geldt voor alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dat

$$\frac{f(tv) - f(0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t(t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4)} = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + t^2 v_2^4}.$$

Deze uitdrukking heeft een limiet voor $t \to 0$ die gelijk is aan $D_v f(0) = v_2$. Veronderstel nu dat $v_1 = 0$. Dan geldt voor alle $t \in \mathbb{R}$ dat $f(tv) = 0$, dus $D_v f(0) = 0$ in dat geval.

(b) Uit het bovenstaande volgt in het bijzonder dat $D_1 f(0) = D_{e_1} f(0) = 0$ en $D_2 f(0) = D_{e_2} f(0) = 0$. Veronderstel dat $f$ totaal differentieerbaar is in $(0, 0)$. Dan volgt dat $Df(0) = 0$. Hieruit volgt weer dat voor alle $v \in \mathbb{R}^2$ geldt $D_v f(0) = Df(0)(v) = 0$, in tegenspraak met het bovenstaande. De functie $f$ is dus niet totaal differentieerbaar in $(0, 0)$.

**Opgave 2**

(a) We beschouwen de functie $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$g(x, y) = (x^2 + yz, 1 + xy - z^2).$$

Dan is $g$ partieel differentieerbaar met Jacobi-matrix

$$Dg(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & z & y \\ y & x & -2z \end{pmatrix}.$$

Uit de Jacobi-matrix blijkt dat alle partiële afgeleiden van $g$ continu zijn, dus $g$ is totaal differentieerbaar; in het bijzonder is $g$ totaal differentieerbaar in $(0, 0, 1)$. Omdat $g(0, 0, 1) = (0, 0)$ en $b$ totaal differentieerbaar in $(0, 0)$ geldt wegens de kettingregel dat de samenstelling $f = b \circ g$ totaal differentieerbaar is in $(0, 0, 1)$.

(b) Door toepassing van de kettingregel volgt tevens dat

$$Df(0, 0, 1) = Db(0, 0) Dg(0, 0, 1) = Db(0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (0 \quad D_1 b(0, 0) \quad -2 D_2 b(0, 0)).$$

**Opgave 3**

(a) Er geldt dat

$$
\begin{aligned}
0 \leq \frac{\|(f(h) - f(0))\, Dg(0)(h)\|}{\|h\|} &\leq \frac{|(f(h) - f(0)|\, \|Dg(0)\| \|h\|}{\|h\|} \\
&= |f(h) - f(0)| \|Dg(0)\|.
\end{aligned}
$$

Uit de continuïteit van $f$ in 0 volgt dat het rechterlid limiet nul heeft voor $h \to 0$. Het resultaat volgt nu door toepassing van de insluitstelling.

(b) We schrijven $g(h) = g(0) + Dg(0)(h) + R(h) = Dg(0)(h) + R(h)$. Uit de totale differentieerbaarheid van $g$ in 0 volgt dat

$$\lim_{h\to 0} \|h\|^{-1} \|R(h)\| = 0.$$

Zij $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de lineaire afbeelding gegeven door $A(h) = f(0)Dg(0)(h)$. Voor $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ schrijven we

$$
\begin{aligned}
r(h) &= \varphi(h) - \varphi(0) - A(h) \\
&= f(h)g(h) - f(0)g(0) - f(0)Dg(0)(h).
\end{aligned}
$$

Dan is

$$
\begin{aligned}
\|h\|^{-1} r(h) &= \|h\|^{-1} f(h)(Dg(0)(h) + R(h)) - f(0)Dg(0)(h) \\
&= \|h\|^{-1}(f(h) - f(0))Dg(0)(h) + \|h\|^{-1} f(h)R(h).
\end{aligned}
$$

Gebruiken we onderdeel (a) dan zien we dat

$$\lim_{h\to 0} \|h\|^{-1} r(h) = \lim_{h\to 0} f(h)\|h\|^{-1} R(h) = f(0) \cdot 0 = 0.$$

Er volgt dat $\varphi(0)$ totaal differentieerbaar is in 0 met totale afgeleide $D\varphi(0) = A = f(0)Dg(0)$.

**Opgave 4**

(a) De functie $f(x, \cdot)$ is continu dus lokaal Riemann-integreerbaar. Voor alle $t \geq 0$ geldt

$$|f(x,t)| = e^{-xt/2} e^{-xt/2} \sqrt{t+1}.$$

Uit $\lim_{t\to\infty} e^{-xt/2}\sqrt{t+1} = 0$ volgt het bestaan van $M = M_x > 0$ zo dat $|e^{-xt/2}\sqrt{t+1}| \leq M$ voor alle $t \geq 0$. We concluderen dat $f(x,t)$ gemajoreerd wordt door $Me^{-xt/2}$. De laatste functie is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $[0, \infty[$. Wegens het majorantiekenmerk is $f(x, \cdot)$ dat ook.

**Alternatief.** Een andere correcte redenering is als volgt. Voor alle $x > 0$ en $t \geq 0$ geldt dat $|f(x,t)| \leq e^{-xt}t$. Met behulp van partiële integratie is direct in te zien dat de functie

$t \mapsto e^{-xt}t$ de functie $t \mapsto -x^{-1}e^{-xt}(t + 1/x)$ als primitieve heeft. Hieruit blijkt dat $t \mapsto e^{-xt}t$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $[0, \infty[$, met als integraal

$$\int_0^\infty e^{-xt}t \, dt = \frac{1}{x^2}.$$

Met het majorantie-criterium concluderen we nu dat $t \mapsto f(x,t)$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $[0, \infty[$.

(b) Zij $a > 0$ willekeurig. Voor $x \geq a$ en $t \geq 0$ geldt dat

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}t\sqrt{t+1} \leq e^{-at/2}e^{-at/2}t\sqrt{t+1} \leq Ce^{-at/2}$$

voor een geschikte constante $C > 0$ die onafhankelijk is van $t$. De laatste functie is oneigenlijk integreerbaar over $]0, \infty[$. Omdat $\partial f/\partial x$ continu is mogen we concluderen dat $F$ differentieerbaar is op het interval $]a, \infty[$. Aangezien deze conclucie geldt voor iedere $a > 0$, leiden we af dat $F$ differentieerbaar is op $]0, \infty[$.

**Alternatief.** Net als in (a) kan een correcte redenering gegeven worden door de partiële afgeleide af te schatten met $t^2e^{-at}$ en door met behulp van partiële integratie aan te tonen dat deze functie oneigenlijk integreerbaar is over $[0, \infty[$.

## Opgave 5

(a) Voor iedere $0 \leq x \leq 1$ is $f(x, \cdot)$ een continue dus lokaal Riemann-integreerbare functie op $[0, \infty[$. Voor $y \geq 1$ geldt $|f(x,y)| \leq y^{-2}$. Aangezien de functie $y^{-2}$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar op $[1, \infty[$ is, volgt dat $f(x, \cdot)$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar op $[1, \infty[$, en dus op $[0, \infty[$ is. De functie $F$ is dus welgedefinieerd.

(b) Zij $n \geq 1$. Uit de driehoeksongelijkheid voor oneigenlijke Riemann-integralen volgt dat voor alle $x \in [0, 1]$ geldt

$$|F(x) - F_n(x)| = \left|\int_n^\infty f(x,y) \, dy\right| \leq \int_n^\infty (1+y)^{-2} \, dy \leq \int_n^\infty y^{-2} \, dy = \frac{1}{n}.$$

Hieraan zien we dat $\|F - F_n\|_{[0,1]} \leq \frac{1}{n}$. We concluderen dat $\|F - F_n\| \to 0$ voor $n \to \infty$. Dus $F_n \to F$ uniform op $[0, 1]$.

(c) **Bonus opgave:** Uit de uniforme convergentie volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 F_n(x) \, dx = \int_0^1 F(x) \, dx = \int_0^1 \int_0^\infty f(x,y) \, dy \, dx.$$

Anderzijds volgt uit de continuïteit van $f$ dat verwisseling van integralen leidt tot:

$$\int_0^1 F_n(x) \, dx = \int_0^1 \int_0^n f(x,y) \, dy \, dx = \int_0^n G(y) \, dy,$$

met $G(y) = \int_0^1 f(x, y)\,dx$. We merken nu op dat voor $y \geq 1$ geldt dat

$$|G(y)| \leq \int_0^1 |f(x, y)|\,dx \leq \int_0^1 y^{-2}\,dx = y^{-2}.$$

De functie $G$ is continu, dus lokaal Riemann-integreerbaar op $[0, \infty[$ en wegens het majorantiekenmerk volgt nu dat $G$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $[0, \infty[$ en dus dat

$$\int_0^\infty G(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^n G(y)\,dy.$$

We concluderen hieruit dat

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^1 f(x, y)\,dx\,dy &= \int_0^\infty G(y)\,dy \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 F_n(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty f(x, y)\,dy\,dx. \end{aligned}$$

## Richtlijn normering

Voor iedere opgave is 10 punten te verdienen. Bij opgave 5 zijn bovendien 5 bonuspunten te verdienen. Het eindcijfer is het totaal gedeeld door 5, afgerond op 1 decimaal nauwkeurig, met een maximum van 10.

**Opgave 1**

(a) 2 voor juiste definitie richtingsafgeleide
2 voor correcte uitwerking geval $v_1 \neq 0$
2 voor correcte uitwerking gegal $v_1 = 0$.

(b) 2 voor afleiding $Df(0) = 0$
2 voor tegenspraak.
of:
4 voor correct bewijs dat $D_v f(0)$ niet lineair is in 0.

**Opgave 2**

(a) 1 voor intro $g$
2 voor de partiele afgeleiden van $g$
1 voor de opmerking dat de partiele afgeleiden van $g$ continu zijn
1 voor de conclusie dat $g$ totaal diff baar is in $(0, 0, 1)$
1 voor conclusie dat de samenstelling $f = b \circ g$ diff baar is wegens kettingregel.

(b) 2 voor juiste formulering kettingregel
2 voor verdere uitwerking.

**Opgave 3**

(a) 2 voor juiste schatting $\|L(h)\| \leq \|L\|\|h\|$.
2 voor gebruik continuïteit $f$ en de afwerking.

(b) 2 voor de opsplitsing van $g$
2 voor de juiste formule voor $r(h)$
1 voor het bewijs dat $\|h\|^{-1}r(h) \to 0$
1 voor de verdere uitwerking.

**Opgave 4**

(a) 2 voor goede formulering van majorantie-kenmerk
2 voor correcte toepassing majorantie-kenmerk.

(b) 2 voor correcte formulering van de stelling van differentiatie onder het integraalteken
2 voor het bekijken van de integraal voor $x \in ]a, \infty[$
2 voor de precieze uitwerking.

**Opgave 5**

(a) 2 voor goede formulering stelling continuiteit van de integraal
2 voor correcte uitwerking van de majorantie

(b) 1 voor juiste definitie uniforme convergentie
1 voor $|F(x) - F_n(x)| = | \int_n^\infty f(x, y)\, dy|$
2 voor driehoeksongelijkheid oneigenlijke integraal
2 voor juiste schatting van de supnorm en uitwerking.

(c) 2 voor limiet onder de integraal
1 voor correcte formulering verwisselingsstelling Riemann-integralen
2 voor de verdere uitwerking.