Uitwerking Tweede deeltentamen Functies en Reeksen

17 januari 2013, 9:00 - 12:00 uur

Opgave 1 (a) Voor $n \to \infty$ geldt dat

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2+1} \Big/ \frac{1}{n^2+1}\right| = \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = \frac{1+n^{-2}}{1+2n^{-1}+n^{-2}} \to 1.$$

De convergentiestraal wordt derhalve gegeven door $\rho = 1/1 = 1$.

(b) Er geldt dat

$$\left|\frac{(i+1)^{n+1}+1}{(i+1)^n+1}\right| = \frac{|(i+1)+(i+1)^{-n}|}{|1+(i+1)^{-n}|} \to |i+1| = \sqrt{2}, \quad (n \to \infty).$$

De convergentiestraal wordt derhalve gegeven door $\rho = 1/\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(c) Er geldt dat

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{(n+1)^n}\right|} = \frac{1}{n+1} \to 0, \quad (n \to \infty).$$

De convergentiestraal wordt daarom gegeven door $1/0 = \infty$.

(d) We beschouwen de reeks $\sum_{n \geq 5}(1+in)^2 w^n$. Uit

$$\left|\frac{(1+i(n+1))^2}{(1+in)^2}\right| = \left|\frac{n^{-1}+i+n^{-1}i}{n^{-1}+i}\right|^2 \to \left|\frac{i+0}{i+0}\right|^2 = 1$$

volgt dat de machtreeks in w convergentiestraal 1 heeft. De reeks convergeert dus voor $|w| < 1$ en divergeert voor $|w| > 1$. De in de opgave gegeven reeks ontstaat door substitutie van z^2 voor w en convergeert dus voor $|z^2| < 1$ ofwel $|z| < 1$ en divergeert voor $|z^2| > 1$, ofwel $|z| > 1$. Hieruit volgt dat de convergentiestraal gelijk is aan 1.

Opgave 2 (a) Zij $n \in \mathbb{N}$ en $k \geq n+1$. Dan geldt voor $z \in V(n)$ dat $|z^2 - k^2| \geq k^2 - |z|^2 \geq k^2 - n^2 > 0$, dus ook

$$|f_k(z)| \leq \frac{1}{k^2 - n^2}.$$

Dit geldt voor alle $z \in V(n)$. Hieruit volgt de gevraagde schatting van de sup-norm.

(b) De reeks $\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k^2-n^2}$ convergeert. Om dit in te zien merken we op dat $k^2/(k^2-n^2) \to 1$ voor $k \to \infty$. Er bestaat dus een $C < 0$ zo dat

$$1/(k^2-n^2) \leq \frac{C}{k^2}, \qquad (k \geq n+1).$$

De reeks $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ convergeert, dus met het majorantie kenmerk concluderen we dat de reeks $\sum_{k \geq n+1}(k^2 - n^2)^{-1}$ convergeert. Met de in (a) gegeven schatting vinden we door toepassing van uniforme majorantie dat de reeks $\sum_{k \geq n+1} f_k$ uniform convergeert op $V(n)$.

(c) Zij $n \in \mathbb{N}$. Uit de in (b) gevonden uniforme convergentie en de continuiteit van de functies f_k, $(k \geq n+1)$ op $V(n)$ volgt dat de functie

$$F_n := \sum_{k=n+1} f_k$$

continu is op $V(n)$. Ook $f_0 + \cdots + f_n$ is continu op $V(n)$. Aangezien $f = f_0 + \cdots + f_n + F_n$ volgt nu dat f continu is op $V(n)$. Dit geldt voor iedere n. Derhalve is f continu op $\cup_n V(n) = V$.

(d) Veronderstel dat de reeks (*) uniform convergent zou zijn op V. Dan zou moeten gelden dat $\|f_k\|_V \to 0$ voor $k \to \infty$. Kies $z_k \in V$ zo dicht bij k dat $|f_k(z_k)| \geq 1$. Dan zien we dat

$$\|f_k\|_V \geq |f_k(z_k)| \geq 1,$$

tegenspraak. De convergentie is dus niet uniform.

Opgave 3

(a) De functie f is continu. Voor $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat de functie $x \mapsto f(x)e^{-ikx}$ als primitieve de functie

$$x \mapsto \frac{e^{(1-ik)x}}{2(1-ik)} + \frac{e^{(-1-ik)x}}{2(-1-ik)} = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(1-ik)x}}{(1-ik)} - \frac{e^{(-1-ik)x}}{(1+ik)}\right]$$

heeft. Hieruit volgt dat

$$(\mathcal{F}f)_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{(1-ik)x}}{(1-ik)} - \frac{e^{(-1-ik)x}}{(1+ik)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^k}{4\pi}\left[\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{(1-ik)} - \frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{(1+ik)}\right] = \frac{(-1)^k(e^{\pi}-e^{-\pi})}{4\pi}\left[\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik}\right] =$$

$$\frac{(-1)^k(e^{\pi}-e^{-\pi})}{4\pi}\frac{2}{1+k^2} = \frac{(-1)^k\,(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi(1+k^2)} = \frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{(-1)^k}{1+k^2}.$$

(b) De functie f is stuksgewijs C^1 en continu. Hieruit volgt dat de rij $s_{f,n}$ van symmetrische partiële Fourier-sommen uniform convergeert met limiet f. Hieruit volgt dat

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

met complexe coëfficiënten a_k, b_k. Deze reeks is uniform convergent.

Er zijn nu twee manieren om tot de uitspraak van de opgave te komen. De eerste manier maakt gebruik van de formules

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos kx\,dx, \quad \text{en} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Uit het even zijn van f volgt dat $b_k = 0$. Dat de coëfficiënten a_k reëel zijn is evident.

De tweede manier gaat uit van de in (b) gevonden Fourier-coëfficiënten. De n-de symmetrische partiële Fourier-som wordt gegeven door

$$\begin{aligned} s_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} (\mathcal{F}f)_k e^{ikx} &= \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k e^{ikx}}{(1+k^2)} \\ &= \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^k}{1+k^2} \cos kx\right). \end{aligned}$$

Hieruit volgt de bewering.

(c) Door in de in (b) gevonden reeks $x = \pi$ in te vullen en te gebruikten dat $f(\pi) = \cosh \pi$ en dat $\cos k\pi = (-1)^k$, vinden we dat

$$\cosh \pi = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}\right).$$

Hieruit volgt dat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{2}\left(\pi \frac{\cosh \pi}{\sinh \pi} - 1\right).$$

Opgave 4 (a) We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die op $[0, 2\pi[$ gegeven wordt door $f(x) = x$ en die 2π-periodiek is. Deze functie behoort tot $C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Hij wordt op $[-2\pi, 0]$ gegeven door $f(x) = f(x + 2\pi) = x + 2\pi$. Er geldt dus $\lim_{x\uparrow 0} = 2\pi$ en we zien dat f niet continu is in 0.

(b) Er geldt dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|\, dx = \langle |g|, 1\rangle \le |\langle |g|, 1\rangle| \le \|1\|_2 \|g\|_2.$$

Nu is

$$\|1\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 1,$$

en de gevraagde schatting volgt.

(c) Voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t)\, dt \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\, |g(t)|\, dt \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_{\mathbb{R}} |g(t)|\, dt \le \|f\|_{\mathbb{R}} \|g\|_2 \end{aligned}$$

waarbij de laatste ongelijkheid geldt wegens onderdeel (b).

(d) Uit een stelling in de leeswijzer volgt dat $\|s_{g,n} - g\|_2 \to 0$. Hieruit volgt dat

$$\|f * s_{g,n} - f * g\|_{\mathbb{R}} = \|f * (s_{g,n} - g)\|_{\mathbb{R}} \le \|f\|_{\mathbb{R}} \|s_{g,n} - g\|_2 \to 0$$

voor $n \to \infty$.

(e) Er geldt dat

$$f * \epsilon_k = (\mathcal{F}f)_k \epsilon_k.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} f * s_{g,n} &= \sum_{|k|\le n} (\mathcal{F}g)_k f * \epsilon_k = \sum_{|k|\le n} (\mathcal{F}g)_k (\mathcal{F}f)_k \epsilon_k \\ &= \sum_{|k|\le n} \mathcal{F}(f * g)_k \epsilon_k = s_{(f*g),k}. \end{aligned}$$

(f) Uit (e) volgt dat $f * s_{g,n}$ continu is. Vanwege de uniforme convergentie in (d) volgt nu dat de functie $f * g$ continu is.

Richtlijn voor de normering

Opgave 1

(a) 2
(b) 3
(c) 2
(d) 3: 1 voor de juiste substitutie nieuwe variabele

Opgave 2

(a) 2:
(b) 3: 2 voor juiste formulering uniforme majorantie-kenmerk; 1 voor de afwerking.
(c) 3: 2 voor het bewijs op $V(n)$, door juiste toepassing van de stelling over uniforme convergentie en continuiteit; 1 voor afwerking
(d) 2: 1 voor de opmerking dat niet geldt $\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_V = 0$; 1 voor rest bewijs

Opgave 3

(a) 5: 1 voor juiste formule, 2 voor juiste manier van primitiveren, 1 voor afwerking
(b) 3: 1 voor juiste argumentatie uniforme convergentie, 2 voor rest
(c) 2: 1 voor het idee om $x = \pi$ in te vullen, 1 voor verdere berekening.

Opgave 4

(a) 1: voor correct voorbeeld (schets zonder argument mag)
(b) 3: 1 voor juiste keuze f, 1 voor juiste formulering Cauchy-Schwartz, 1 voor afwerking
(c) 4: 1 voor juiste formule convolutie, 2 voor schatting integraal, 1 voor gebruik (b)
(d) 2: 1 voor schatting $\|f * s_{g,n} - f * g\| \le \|f\|_{\mathbb{R}} \|s_{g,n} - g\|_2$,
1 voor opmerking dat $\|s_{g,n} - g\|_2 \to 0$

Bonuspunten:
(e) 3: 1 voor toepassing formule $f * \epsilon_k = (\mathcal{F}f)_k \epsilon_k$; 1 voor toepassing $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.
1 voor rest.
(f) 2: voor gebruik (d) en gebruik stelling