Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In electronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2003/2004 gegeven door Prof. Dr. J.J. Duistermaat.

Functies en Reeksen (WISB211)
28 januarie 2004

2e Deeltentamen Functies en Reeksen, 28 januari 2004, 14-17 uur.
U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt. Veel succes!

Opgave 1

Zij $f : [0, \infty[\to \mathbf{R}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ en $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Definieer, voor iedere $k \in \mathbf{Z}_{>0}$, de functie $f_k : [0, \infty[\to \mathbf{R}$ door middel van $f_k(x) = f(k\,x)$, $x \geq 0$. Bewijs:

a) De rij $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ convergeert puntsgewijs naar 0. (Hint: behandel het onderzoek in het punt $x = 0$ en in een punt $x > 0$ apart.)

b) Voor iedere $k \in \mathbf{Z}_{>0}$ geldt dat $\sup_{x\geq 0} |f_k(x)| \geq 1$. De rij $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ convergeert niet uniform naar 0.

Opgave 2

a) Bewijs dat $\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 0 \iff \mathrm{e}^{2z} = -1 = \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}} \iff$ er is een geheel getal k waarvoor $z = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{i} + k\pi\,\mathrm{i}$.

b) Bewijs dat

$$(*) \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n,$$

waarin het rechterlid een machtreeks is met convergentiestraal gelijk aan $\frac{\pi}{2}$ en de identiteit geldt voor alle complexe getallen z waarvoor $|z| < \frac{\pi}{2}$.

c) Bereken de afgeleiden van het linkerlid in (*) tot en met de orde twee en bereken c_0, c_1 en c_2.

Opgave 3

Zij $r > 0$ een gegeven positief reëel getal.

a) Bewijs dat, voor iedere $x \in \mathbf{R}$,

$$\sum_{n \geq 0} \left| \frac{r^n}{n!} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n\, x} \right| = \mathrm{e}^r \, .$$

Bewijs dat de reeks $\sum_{n\geq 0} \frac{r^n}{n!} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n\, x}$ uniform voor $x \in \mathbf{R}$ convergeert naar de functie $\mathrm{e}^{r \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x}}$.

b) Bewijs dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{r \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x}} \, \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\, k\, x} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} r^k/k! & \text{als} \quad k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, \\ 0 & \text{als} \quad k \in \mathbf{Z}_{<0}. \end{cases}$$

c) Wat is, voor een willekeurige 2π-periodieke functie, de identiteit van Parseval? Gebruik deze om te bewijzen dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2r \, \cos x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(n!)^2}.$$