# Uitwerking Tentamen Functies en Reeksen

**7 november 2013, 13:30 - 16:30 uur**

**Opgave 1**

2 pt (a) De verzameling $V$ is open in $\mathbb{R}^2$ en $f$ is partieel differentieerbaar op $V$ met partiele afgeleiden die gegeven worden door

$$D_1 f(x,y) = \frac{2xy^3(x^2+y^2)^2 - 4x^3y^3(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2xy^5 - 2x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

en

$$D_2 f(x,y) = \frac{3x^2y^2(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{3x^4y^2 - x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}$$

Uit deze formules blijkt dat de partiele afgeleiden continu zijn op $V$. Wegens een stelling is $f$ dus totaal differentieerbaar op $V$, met totale afgeleide gegeven door de Jacobi-matrix

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2xy^5 - 2x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} & \frac{3x^4y^2 - x^2y^4}{(x^2+y^2)^3} \end{pmatrix}.$$

3 pt (b) Zij $v \in \mathbb{R}^2$. Dan geldt dat

$$\frac{f(tv) - f(0)}{t} = t^{-1} \frac{t^5 v_1^2 v_2^3}{t^4(v_1^2+v_2^2)^2} \to \frac{v_1^2 v_2^3}{(v_1^2+v_2^2)^2}$$

voor $t \to 0$. Hieruit volgt dat $f$ richtingsdifferentieerbaar is in $(0,0)$ in de richting $v$, met richtingsafgeleide

$$D_v f(0,0) = \frac{v_1^2 v_2^3}{(v_1^2+v_2^2)^2}.$$

2 pt (c) Uit (b) volgt dat $f$ partieel differentieerbaar is in $(0,0)$ met partiele afgeleiden

$$D_1 f(0,0) = D_{(1,0)}(0,0) = 0 \quad \text{en} \quad D_2 f(0,0) = D_{(0,1)}(0,0) = 0.$$

3 pt (d) Veronderstel dat $f$ totaal differentieerbaar is in $(0,0)$. Dan is $Df(0,0) = (D_1 f(0,0) \;\; D_2 f(0,0)) = (0 \;\; 0)$, dus voor elke $v \in \mathbb{R}^2$ is

$$D_v f(0,0) = Df(0,0)v = 0,$$

in tegenspraak met wat in (b) gevonden is.

**Opgave 2**

1 pt (a) Laat $x > 0$. Dan is de rij uniform convergent op $[0, x+1]$, dus puntsgewijs convergent in $x$. Dus

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \in [-1, 1].$$

2 pt (b) Laat $x_0 \geq 0$. Kies $R > x_0$. Dan is de rij continue functies $f_n$ uniform convergent op $[0, R]$, dus de limietfunctie is continu op $[0, R]$. In het bijzonder is $f$ continu in $x_0$.

2 pt (c) Laat $R > 0$. Dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R e^{-t} f_n(t)\, dt - \int_0^R e^{-t} f(t)\, dt \right| &\leq \int_0^R e^{-t} |f_n(t) - f(t)|\, dt \\ &\leq \int_0^R e^{-t}\, dt \|f - f_n\|_{[0,R]} \\ &\leq \|f_n - f\|_{[0,R]} \to 0. \end{aligned}$$

Met de insluitstelling volgt hetgeen te bewijzen was.

2 pt (d) De functies $f_n$ en $f$ zijn continu dus lokaal Riemann-integreerbaar. Voor alle $t$ geldt $|e^{-t} f_n(t)| \leq e^{-t}$ en een zelfde schatting voor $f$. Met de majorantiestelling volgt de convergentie van elk der integralen.

3 pt (e) Zij $\epsilon > 0$. Dan bestaat er een $R > 0$ zo dat $\int_R^\infty e^{-t}\, dt = e^{-R} < \epsilon/3$. Uit (c) volgt het bestaan van een $N$ zo dat voor $n \geq N$ geldt

$$\left| \int_0^R e^{-t} f_n(t)\, dt - \int_0^R e^{-t} f(t)\, dt \right| < \epsilon/3. \qquad (*)$$

Voor alle $n \geq N$ geldt ook

$$\begin{aligned} \left| \int_R^\infty e^{-t} f_n(t)\, dt - \int_R^\infty e^{-t} f(t)\, dt \right| &\leq \int_R^\infty e^{-t} (|f_n(t)| + |f(t)|)\, dt \\ &\leq 2 \int_R^\infty e^{-t}\, dt < 2\epsilon/3. \end{aligned}$$

Combineren we dit met (*) dan vinden we dat voor $n \geq N$ geldt

$$\left| \int_0^\infty e^{-t} f_n(t)\, dt - \int_0^\infty e^{-t} f(t)\, dt \right| < \epsilon/3 + 2\epsilon/3 = \epsilon.$$

**Opgave 3**

3 pt (a) Laat $k \in \mathbb{Z}$. Dan geldt dat

$$\begin{aligned} (\mathcal{F} f_a)_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iat} e^{-ikt}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi(ia - ik)} \left[ e^{(ia-ik)t} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}}{2\pi i(a-k)} \\ &= \frac{\sin a\pi}{\pi(a-k)}. \end{aligned}$$

3 pt (b) Zij $0 < a < 1$. De functie $f$ is lokaal Riemann-integreerbaar (zelfs stuksgewijs $C^1$). Derhalve geldt de Parseval identiteit , dus

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_a(t)|^2 \, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}(f_a)_k|^2.$$

Het linkerlid is gelijk aan 1 en het rechterlid is gelijk aan

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(\sin a\pi)^2}{\pi^2(a-k)^2}.$$

Derhalve

$$1 = \left(\frac{\sin a\pi}{\pi}\right)^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(a-k)^2}.$$

Hieruit volgt de gewenste identiteit, aangezien $\sin a\pi \neq 0$.

4 pt (c) Voor $k \geq 2$ geldt $(k-a) \geq (k-1)$, dus

$$\left|\frac{1}{(k-a)^2}\right| \leq \frac{1}{(k-1)^2} \qquad (a \in [\delta, 1-\delta]).$$

Omdat de reeks $\sum_{k\geq 2}(k-1)^{-2} = \sum_{k\geq 1} k^{-2}$ convergeert, volgt met de uniforme majorantiestelling dat de reeks $\sum_{k\geq 2}(a-k)^{-2}$ uniform convergeert voor $a \in [\delta, 1-\delta]$.

Voor $k \geq 1$ geldt dat $(a-(-k)) \geq k$, dus

$$\frac{1}{(a-(-k))^2} \leq \frac{1}{k^2}, \qquad (a \in [\delta, 1-\delta]).$$

Met uniforme majorantie volgt nu dat de reeks

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(a-(-k))^2}$$

uniform convergeert voor $a \in [\delta, 1-\delta]$.

De functie $a \mapsto \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{(a-k)^2}$ is gedefinieerd en begrensd op $[\delta, 1-\delta]$. We concluderen dat de reeks in (b) uniform convergeert voor $a \in [\delta, 1-\delta]$.

**Opgave 4**

1 pt (a) Schrijf $a_k = (-1)^{k+1}k^{-1}$. Dan heeft

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1}$$

limiet $L = 1$ voor $k \to \infty$, dus de convergentiestraal van de machtreeks is $\rho = L^{-1} = 1$.

2 pt (b) Volgens een stelling definieert een machtreeks binnen zijn convergentiecirkel een complex differentieerbare functie. Dus $h$ is complex differentieerbaar op $D(0;1)$. Bovendien wordt $h'(z)$ gegeven door de machtreeks voor $h$ termsgewijs te differentiëren. Dus voor $|z| < 1$ geldt

$$h'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^{-1} k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z}.$$

2 pt (c) We beschouwen de functie $f : D \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$f(z) = e^{-h(z)}(1+z).$$

Toepassing van de product- en de kettingregel voor complexe differentiatie geeft:

$$\begin{aligned} f'(z) = &= \left[\frac{d}{dz} e^{-h(z)}\right](1+z) + e^{-h(z)} \\ &= -h'(z) e^{-h(z)}(1+z) + e^{-h(z)} \\ &= -e^{-h(z)} + e^{-h(z)} = 0. \end{aligned}$$

De functie $f$ is dus constant op $D$. Tevens geldt $f(0) = e^{-h(0)} = e^0 = 1$, dus $f$ is constant gelijk aan 1.

3 pt (d) Voor $0 < |z| < 1$ geldt dat

$$z^{-1} h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^{-1} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)^{-1} z^k.$$

De laatste machtreeks definieert een continue functie $\varphi$ binnen zijn convergentie cirkel, dus

$$\lim_{z \to 0} z^{-1} h(z) = \varphi(0) = 1.$$

Een tweede goede redenering is als volgt:

$$\frac{h(z)}{z} = \frac{h(z) - h(0)}{z} \to h'(0)$$

voor $z \to 0$, aangezien $h$ complex differentieerbaar is in 0. Nu is $h'(0) = (1+0)^{-1} = 1$.

Tweede deel van (d): Zij $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Omdat $z/n \to 0$ voor $n \to \infty$ volgt met de substitutiestelling voor limieten dat

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{z}{n}\right)^{-1} h\left(\frac{z}{n}\right) = 1.$$

Hieruit volgt door vermenigvuldiging met $z$ dat $nh(z/n) \to z$. Het is evident dat dit ook geldt voor $z = 0$.

2 pt (e) Omdat de functie $w \mapsto e^w$ continu is in $w$ krijgen we uit het voorgaande met de substitutiestelling voor limieten dat

$$\lim_{n \to \infty} e^{nh(\frac{z}{n})} = e^z.$$

Merk nu op dat

$$e^{nh(\frac{z}{n})} = \left(e^{h(\frac{z}{n})}\right)^n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

wegens (c).

4 pt (f) Zij $\epsilon > 0$. Uit (d) volgt het bestaan van een $\delta > 0$ zo dat

$$0 < |z| < \delta \Rightarrow |z^{-1}h(z) - 1| < \epsilon/R.$$

Zij nu $N \in \mathbb{N}$ zo dat $R/N < \delta$. Dan volgt voor alle $z \in V \setminus \{0\}$ en $n \geq N$ dat $0 < |z/n| < \delta$ dus

$$|(z/n)^{-1}h(z/n) - 1| < \epsilon/R$$

waaruit volgt dat

$$|nh(z/n) - z| < \epsilon|z|/R \leq \epsilon.$$

Zij $f_n : z \mapsto nh(z/n)$ en $f : z \to z$, dan zien we dat $\|f_n - f\|_V < \epsilon$ voor $n \geq N$. Dus $f_n \to f$ uniform op $V$.

Zij wederom $\epsilon > 0$. De functie $w \mapsto e^w$ is continu in 0. Dus er bestaat een $\delta > 0$ zo dat

$$|w| < \delta \Rightarrow |e^w - 1| < \epsilon e^{-R}.$$

Er is een $N$ zo dat $n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_V < \delta$. Zij $z \in V$ en $n \geq N$. Dan geldt $|f_n(z) - f(z)| < \delta$, dus

$$|e^{f_n(z)-f(z)} - 1| < \epsilon e^{-R}$$

dus ook

$$|e^{f_n(z)} - e^{f(z)}| < \epsilon|e^{f(z)}|e^{-R} = \epsilon e^{\mathrm{Re}\, f(z)-R} \leq \epsilon.$$

We concluderen dat $e^{f_n} \to e^f$ uniform op $V$. Gebruik nu dat

$$e^{f_n(z)} = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad \text{en} \quad e^{f(z)} = e^z.$$

## Richtlijn normering

(1)

(a) : 2
1 voor de opmerking dat men direct ziet dat $D_1 f$ en $D_2 f$ continu zijn op $V$, en dat $f$ dus totaal differentieerbaar is op $V$ met totale afgeleide $Df = (D_1 f \quad D_2 f)$
1 voor de berekening van de partiele afgeleiden op $V$

(b) : 3
1 voor de correcte definitie richtingsafgeleide
2 voor verdere uitwerking en formule.

(c) : 2

(d) : 3
1 voor het idee uit het ongerijmde te bewijzen
1 voor de conclusie dat $Df(0) = 0$.
1 voor rest

(2)

(a) : 1

(b) : 2
1 voor de opmerking dat continuiteit behouden blijft onder uniforme convergentie
1 voor de afwerking

(c) : 2
1 voor schatting integraal met driehoeksongelijkheid
1 voor schatting op supnorm en afwerking

(d) : 2
1 voor de opmerking dat de functies continu zijn dus lokaal Riemann-integreerbaar
1 voor toepassing majorantie

(e) : 3
1 voor $\epsilon$ en keuze $R$
1 voor keuze $N$ en schatting (*)
1 voor schatting staartstuk en afwerking

(3)

(a) : 3
1 voor juiste formule Fouriercoeff
1 voor primitiveren
1 voor verdere afwerking

(b) : 3
1 voor de opmerking dat Parseval toegepast mag worden
1 voor juiste formulering van Parseval
1 voor de afwerking.

(c) : 4
1 voor het opsplitsen van de som
2 voor de eerste majorantie
1 voor de tweede majorantie

(4)

(a) : 1

(b) : 2
1 voor juiste formulering stelling en term voor term differentieren
1 voor verdere berekening

(c) : 2
1 voor het idee te differentieren
1 voor de afwerking

(d) : 3
1 voor de opmerking dat de machtreeks die ontstaat continu is in 0 of voor de opmerking dat de limiet gezien kan worden als afgeleide.
1 voor de afwerking
1 voor toepassing substitutie stelling.

(e) : 2
1 voor de juiste toepassing van de substitutiestelling
1 voor de verdere berekening

(f) : 4
2 voor de eerste uniforme convergentie
2 voor de tweede uniforme convergentie