Herkansingstentamen Functies en Reeksen

3 januari 2014, 9:00 - 12:00 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 5 opgaven tellen even zwaar, elk voor 10 punten.

Succes !

Opgave 1 In het onderstaande is $v \in \mathbb{R}$ een constante. We beschouwen de functie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$\varphi(x, y) = (x - vy, x + vy).$$

3 pt (a) Beargumenteer dat φ totaal differentieerbaar is en bepaal de totale afgeleide $D\varphi(x, y)$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

We beschouwen een C^2-functie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en definiëren de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $f(x, y) = F(\varphi(x, y))$.

4 pt (b) Beargumenteer dat de functie f totaal differentieerbaar is en geef een formule die de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ uitdrukt in de partiële afgeleiden $D_1F(\varphi(x, y))$ en $D_2F(\varphi(x, y))$.

3 pt (c) Bewijs dat voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ geldt dat:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = v[D_2^2F(\varphi(x, y)) - D_1^2F(\varphi(x, y))].$$

Opgave 2

5 pt (a) Bewijs dat de integraal $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}\, dt$ convergent is .

Op soortgelijke wijze kan men bewijzen dat de integraal $\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt$ convergent is. Je mag dit in het vervolg gebruiken.

We beschouwen voor $x \in \mathbb{R}$ de integraal

$$f(x) := \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}(1 + t^2)}\, dt.$$

ZOZ

2 pt (b) Toon aan dat de bovenstaande integraal voor alle $x \in \mathbb{R}$ convergent is en een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieert.

3 pt (c) Toon aan dat f differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ en bepaal $f'(0)$.

Opgave 3 We beschouwen de ruimte $\mathcal{B}$ van begrensde functies $[0, \infty[\to \mathbb{R}$, voorzien van de sup-norm $\| \cdot \|_{[0,\infty[}$.

3 pt (a) Laat zien dat voor alle $f, g \in \mathcal{B}$ en elke $x \geq 0$ geldt:

$$|f(x)| \leq |g(x)| + \|f - g\|_{[0,\infty[}.$$

4 pt (b) Laat $(f_n)_{n\geq 0}$ een convergente rij in $\mathcal{B}$ zijn met limietfunctie f. Veronderstel dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$. Toon aan dat $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

We beschouwen de deelruimte $\mathcal{B}_0$ van functies $f \in \mathcal{B}$ die voldoen aan $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Voorzien van de uniforme afstand $d : (f, g) \mapsto \|f - g\|_{[0,\infty[}$ is $\mathcal{B}_0$ een metrische ruimte.

3 pt (c) Bewijs dat de metrische ruimte $(\mathcal{B}_0, d)$ volledig is.

Opgave 4 Bepaal de convergentiestralen van de volgende machtreeksen:

3 pt (a) $\sum_{k=1}^{\infty} k(z - i)^k$,

3 pt (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2+2^k}$,

4 pt (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k+2}$.

Opgave 5 Voor $0 \leq a < 1$ beschouwen we de 2π-periodieke functie $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die op $[-\pi, \pi]$ gedefinieerd is door

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad |x| \leq a\pi, \\ 0 & \text{als} \quad a\pi < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

3 pt (a) Bepaal de complexe Fourier coëfficiënt $c_k = (\mathcal{F} f_a)_k$ voor elke $k \in \mathbb{Z}$.

2 pt (b) Beargumenteer dat de limiet

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

bestaat voor alle $x \in \mathbb{R}$. In welke punten is de functie L continu? Geef de waarden van L in de discontinuïteitspunten.

3 pt (c) Bewijs dat voor alle $0 \leq a < 1$ geldt dat

$$\frac{a(1-a)}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin ka\pi}{k\pi} \right)^2.$$

2 pt (d) Bewijs dat de in (c) gevonden reeks uniform convergent is in de variabele $a \in \mathbb{R}$. We noemen de som van de reeks $S(a)$. Geef een expliciete beschrijving van de functie $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.