Tentamen Functies en Reeksen

6 november 2014, 13:30 – 16:30 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** (Arjen Baarsma, KaYin Leung, Roy Wang) en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 5 opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1

We beschouwen de functies $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$h(u,v) := (uv + 2v^2, (u-v)^2, u^3), \qquad f(x,y,z) := x^2 - z^2 \cos y + y \cos z.$$

4 pt (a) Bewijs dat f en h totaal differentieerbaar zijn, en bepaal de matrices van de totale afgeleiden $Dh(u,v)$ en $Df(x,y,z)$.

4 pt (b) Bewijs dat $f \circ h$ richtingsdifferentieerbaar is in $(0,1)$ en dat voor ieder vector $w \in \mathbb{R}^2$ geldt dat

$$D_w(f \circ h)(0,1) = Df(2,1,0)(D_w h(0,1)).$$

Hint: bepaal eerst een formule voor $D(f \circ h)(0,1)$.

2 pt (c) Bepaal de richtingsafgeleide $D_w(f \circ h)(0,1)$ voor de kolomvector $w = (-2,1)^{\mathrm{T}}$.

Opgave 2

4 pt (a) Toon aan dat de functie $\varphi : t \mapsto e^{-t}/\sqrt{t}$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op $]0,\infty[$; vergeet daarbij niet de lokale Riemann-integreerbaarheid te beargumenteren.

3 pt (b) Toon aan dat door

$$g(x) := \int_0^\infty \frac{\cos(x\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\, e^{-t}\, dt$$

een continue functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt.

3 pt (c) Toon aan dat de functie g differentieerbaar is, en dat $|g'(x)| \leq 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

ZOZ

Opgave 3 Voor $k \geq 1$ definiëren we de functie $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f_k(x) = \frac{kx + x^2}{k^3 + x^2}.$$

3 pt (a) Bewijs dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ puntsgewijs convergeert op $\mathbb{R}$.

We definiëren de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \qquad (x \in \mathbb{R}). \qquad (*)$$

3 pt (b) Bewijs dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ uniform convergeert op $[-R, R]$, voor elke $R > 0$.

2 pt (c) Bewijs dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ niet uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

2 pt (d) Bewijs dat de in $(*)$ gedefinieerde functie f continu is op $\mathbb{R}$.

Opgave 4 Bepaal voor elk van de volgende machtreeksen de convergentiestraal, en het middelpunt van de convergentiecirkel.

2 x 5 pt (a) $$\sum_{n\geq 1} \frac{(3+i)^n z^n}{n+1};$$ (b) $$\sum_{n\geq 1} \frac{n(z+2i)^n}{2^n}.$$

Opgave 5 Gegeven is een constante $0 < a < 1$. We beschouwen de 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die voor $-\pi < x \leq \pi$ gedefinieerd is door $f(x) = \cos ax$.

2 pt (a) Toon aan dat f continu is op $\mathbb{R}$. (Hint: maak een schets van de grafiek van f.)

3 pt (b) Bereken de Fourier-coëfficiënten van f. Laat in het bijzonder zien dat er een constante $C > 0$ bestaat zo dat deze Fourier-coëfficiënten gegeven worden door

$$(\mathcal{F}f)_k = C\frac{(-1)^k}{a^2 - k^2}.$$

Hint: schrijf $\cos ax$ als som van complexe e-machten.

2 pt (c) Bewijs dat de Fourier-reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)_k \, e^{ikx}$ absoluut uniform convergent is op $\mathbb{R}$.

3 pt (d) Bewijs dat

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2}.$$

Formuleer expliciet de stelling(en) die je daarbij gebruikt.