Tentamen Functies en Reeksen

6 november 2014, 13:30 – 16:30 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** (Arjen Baarsma, KaYin Leung, Roy Wang) en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 5 opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1

We beschouwen de functies $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$h(u,v) := (uv + 2v^2, (u-v)^2, u^3), \qquad f(x,y,z) := x^2 - z^2 \cos y + y \cos z.$$

4 pt (a) Bewijs dat f en h totaal differentieerbaar zijn, en bepaal de matrices van de totale afgeleiden $Dh(u,v)$ en $Df(x,y,z)$.

4 pt (b) Bewijs dat $f \circ h$ richtingsdifferentieerbaar is in $(0,1)$ en dat voor ieder vector $w \in \mathbb{R}^2$ geldt dat

$$D_w(f \circ h)(0,1) = Df(2,1,0)(D_w h(0,1)).$$

Hint: bepaal eerst een formule voor $D(f \circ h)(0,1)$.

2 pt (c) Bepaal de richtingsafgeleide $D_w(f \circ h)(0,1)$ voor de kolomvector $w = (-2,1)^{\mathrm{T}}$.

Opgave 2

4 pt (a) Toon aan dat de functie $\varphi : t \mapsto e^{-t}/\sqrt{t}$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op $]0,\infty[$; vergeet daarbij niet de lokale Riemann-integreerbaarheid te beargumenteren.

3 pt (b) Toon aan dat door

$$g(x) := \int_0^\infty \frac{\cos(x\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\, e^{-t}\, dt$$

een continue functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt.

3 pt (c) Toon aan dat de functie g differentieerbaar is, en dat $|g'(x)| \leq 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

ZOZ

Opgave 3 Voor $k \geq 1$ definiëren we de functie $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f_k(x) = \frac{kx + x^2}{k^3 + x^2}.$$

3 pt (a) Bewijs dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ puntsgewijs convergeert op $\mathbb{R}$.

We definiëren de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \qquad (x \in \mathbb{R}). \qquad (*)$$

3 pt (b) Bewijs dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ uniform convergeert op $[-R, R]$, voor elke $R > 0$.

2 pt (c) Bewijs dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ niet uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

2 pt (d) Bewijs dat de in $(*)$ gedefinieerde functie f continu is op $\mathbb{R}$.

Opgave 4 Bepaal voor elk van de volgende machtreeksen de convergentiestraal, en het middelpunt van de convergentiecirkel.

2 x 5 pt (a) $$\sum_{n\geq 1} \frac{(3+i)^n z^n}{n+1};$$ (b) $$\sum_{n\geq 1} \frac{n(z+2i)^n}{2^n}.$$

Opgave 5 Gegeven is een constante $0 < a < 1$. We beschouwen de 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die voor $-\pi < x \leq \pi$ gedefinieerd is door $f(x) = \cos ax$.

2 pt (a) Toon aan dat f continu is op $\mathbb{R}$. (Hint: maak een schets van de grafiek van f.)

3 pt (b) Bereken de Fourier-coëfficiënten van f. Laat in het bijzonder zien dat er een constante $C > 0$ bestaat zo dat deze Fourier-coëfficiënten gegeven worden door

$$(\mathcal{F}f)_k = C\frac{(-1)^k}{a^2 - k^2}.$$

Hint: schrijf $\cos ax$ als som van complexe e-machten.

2 pt (c) Bewijs dat de Fourier-reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)_k \, e^{ikx}$ absoluut uniform convergent is op $\mathbb{R}$.

3 pt (d) Bewijs dat

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2}.$$

Formuleer expliciet de stelling(en) die je daarbij gebruikt.

Uitwerking, Tentamen Functies en Reeksen, 8 nov 2014

Opgave 1

(a) Met de gebruikelijke rekenregels volgt dat de functies h en f partieel diffferentieerbaar zijn en dat hun Jacobi-matrices gegeven worden door

$$Dh(u,v) = \begin{pmatrix} v & u+4v \\ 2(u-v) & -2(u-v) \\ 3u^2 & 0 \end{pmatrix},$$

en

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & z^2\sin y + \cos z & -2z\cos y - y\sin z \end{pmatrix}.$$

Met de gebruikelijke rekenregels zien we dat de optredende partiële afgeleiden continue functies zijn. Hieruit concluderen we met een stelling dat f en h totaal differentieerbaar zijn, en dat hun totale afgeleiden $Df(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en $Dh(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeven worden door de hierboven bepaalde Jacobi matrices.

(b) Uit de kettingregel volgt dat $f \circ h$ overal totaal differentieerbaar is. De totale afgeleide in $(0,1)$ wordt gegeven door

$$D(f\circ h)(0,1) = Df(h(0,1)) \circ Dh(0,1) = Df(2,1,0) \circ Dh(0,1).$$

Wegens eens stelling is de functie $f \circ h$ daarom ook richtingsdifferentieerbaar in $(0,1)$, terwijl voor iedere $w \in \mathbb{R}^2$ geldt dat

$$\begin{aligned} D_w(f\circ h)(0,1) &= [D(f\circ h)(0,1)](w) \\ &= [Df(2,1,0)\circ Dh(0,1)](w) \\ &= Df(2,1,0)[Dh(0,1)(w)] = Df(2,1,0)D_w h(0,1). \end{aligned}$$

(c) Invullen in de in (a) gevonden formules levert

$$Dh(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad Df(2,1,0) = (4 \quad 1 \quad 0).$$

Hieruit volgt wegens eens stelling dat

$$D_w h(0,1) = Dh(0,1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

en dus

$$D_w(f\circ h)(0,1) = (4 \quad 1 \quad 0)\,(2 \quad 6 \quad 0)^{\mathrm{T}} = 14.$$

Opgave 2

(a) De functie φ is continu dus lokaal Riemann-integreerbaar op het interval. We splitsen het interval op als

$$]0,\infty[\, = \,]0,1] \,\cup\, [1,\infty[, \qquad (\#)$$

en onderzoeken de oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid op beide stukken. Voor $0 < t \leq 1$ geldt $|\varphi(t)| \leq t^{-1/2}$, terwijl de laatstgenoemde functie oneigenlijk integreerbaar is op $]0,1]$. Met majorantie volgt dat ook φ dat is.

Voor $1 \leq t < \infty$ geldt dat $|\varphi(t)| \leq e^{-t}$, terwijl de laatstgenoemde functie oneigenlijk integreerbaar is over $[1,\infty[$. Hieruit volgt dat ook φ dat is.

We concluderen dat φ oneigenlijk integreerbaar is over beide deelintervallen in (#), dus over $]0,\infty[$.

(b) We definiëren de functie $f : \mathbb{R}\times\,]0,\infty[\, \to \mathbb{R}$ door

$$f(x,t) = \frac{\cos(x\sqrt{t})}{\sqrt{t}} e^{-t}\; dt.$$

Deze functie is continu, en er geldt voor alle $(x,t) \in \mathbb{R}\times\,]0,\infty[$ dat

$$|f(x,t)| \leq \varphi(t),$$

dus de gegeven integraal convergeert voor alle $x \in \mathbb{R}$ en de functie g is continu op $\mathbb{R}$.

(c) De functie f is partieel differentieerbaar naar de x-variabele, met partiële afgeleide gegeven door

$$D_1 f(x,t) = -\sin(x\sqrt{t})\; e^{-t}.$$

Hieraan zien we dat $D_1 f$ continu is op $\mathbb{R}\times\,]0,\infty[$. Voor alle (x,t) in de laatstgenoemde verzameling geldt dat

$$|D_1 f(x,t)| \leq e^{-t},$$

terwijl $t \mapsto e^{-t}$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op $]0,\infty[$. Hieruit volgt met een stelling dat de functie g differentieerbaar is. Voor de afgeleide geldt

$$|g'(x)| = \left|\int_0^\infty D_1 f(x,t)\; dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-t}\; dt = 1.$$

Opgave 3

(a) Er geldt dat

$$f_k(x) = \frac{1}{k^2}\frac{x + x^2/k}{1 + x^2/k^2}.$$

Hieruit volgt dat $|f_k(x)|/(1/k^2) \to |x|$ voor $k \to \infty$. De reeks $\sum_{k\geq 1} k^{-2}$ is convergent. Met behulp van het limietkenmerk concluderen we dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k(x)$ convergent is voor elke $x \in \mathbb{R}$.

(b) Voor $|x| \leq R$ geldt dat

$$|f_k(x)| \leq \frac{k|x| + x^2}{k^3 + x^2} \leq \frac{k|x| + x^2}{k^3} \leq \frac{|x| + x^2/k}{k^2} \leq \frac{R + R^2}{k^2}.$$

Hieruit concluderen we dat

$$\|f_k\|_{[-R,R]} \leq \frac{R + R^2}{k^2}.$$

Aangezien de reeks $\sum_{k \geq 1} 1/k^2$ convergent is, concluderen we met het majorantiekenmerk dat de reeks $\sum_{k \geq 1} f_k$ absoluut uniform, dus uniform, convergent is op $[-R, R]$.

(c) Voor $x \geq 0$ geldt

$$|f_k(x)| = \frac{kx + x^2}{k^3 + x^2} \to 1 \quad (x \to \infty).$$

Hieraan zien we dat $\|f_k\|_{\mathbb{R}} \geq 1$.

[Alternatief argument: er geldt dat $|f_k(k^2)| = 1$, dus $\|f_k\|_{\mathbb{R}} \geq 1$.]

Dus er geldt niet dat $\|f_k\|_{\mathbb{R}} \to 0$ voor $k \to \infty$. Hieruit volgt dat de reeks $\sum_{k \geq 1} f_k$ niet uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

(d) Zij $x_0 \in \mathbb{R}$. Kies $R > 0$ zo dat $|x_0| < R$. De reeks voor f convergeert uniform op $[-R, R]$, en de functies f_k zijn continu op $\mathbb{R}$, dus f is continu op $[-R, R]$. Hieruit volgt dat f continu is in x_0. Aangezien x_0 een willekeurig punt van $\mathbb{R}$ is concluderen we dat f continu is op $\mathbb{R}$.

Opgave 4

(a) Schrijf $a_n = (3 + i)^n/(n + 1)$. Dan is

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|(3 + i)\frac{n + 1}{n + 2}\right| = \sqrt{10}\frac{1 + 1/n}{1 + 2/n} \to \sqrt{10} \qquad (n \to \infty).$$

Hieruit concluderen we dat de convergentiestraal van de machtreeks gegeven wordt door $\rho = 1/\sqrt{10} = \frac{1}{10}\sqrt{10}$. Aangezien $z^n = (z - 0)^n$, gaat het hier om een machtreeks rond nul. De convergentiecirkel heeft dus middelpunt 0.

(b) Schrijf $b_n = n2^{-n}$. Dan geldt dat

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{n + 1}{2n} = \frac{1 + 1/n}{2} \to \frac{1}{2} \qquad (n \to \infty).$$

Hieruit volgt dat de convergentiestraal van de machtreeks gelijk is aan $1/(1/2) = 2$. Aangezien $(z + 2i)^n = (z - (-2i))^n$, gaat het hier om een machtreeks rond $-2i$. Het middelpunt van de convergentiecirkel is dus $-2i$ (= $(0, -2)$).

Opgave 5

(a) Wegens de 2π-periodiciteit van f en de evidente continuïteit van f op $]-\pi,\pi[$ hoeven we alleen de continuïteit van f in π aan te tonen.

Door de schets van de grafiek realiseren we ons dat de functie $x \mapsto \cos ax$ een grafiek heeft die symmetrisch is ten aanzien van y-as. In formule: $f(-x) = \cos(a(-x)) = \cos(-ax) = \cos(ax) = f(x)$ voor alle $x \in]-\pi,\pi[$. Er geldt daarom dat

$$\lim_{x\downarrow-\pi} f(x) = \lim_{x\uparrow\pi} f(-x) = \lim_{x\uparrow\pi} f(x) = f(\pi).$$

Met de 2π-periodiciteit van f volgt nu dat f continu is in π. Het precieze argument is:

$$\lim_{x\downarrow\pi} f(x) = \lim_{x\downarrow-\pi} f(x+2\pi) = \lim_{x\downarrow-\pi} f(x) = f(\pi) = \lim_{x\uparrow\pi} f(x),$$

dus f is continu in π.

(b) De k-de Fourier-coëfficiënt van f wordt gegeven door

$$c_k = (\mathcal{F}f)_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

We merken op dat $f(x) = (e^{iax} + e^{-iax})/2$ en berekenen eerst

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iax}\, e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{i(a-k)x}}{i(a-k)}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^k}{2\pi}\frac{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}}{i(a-k)} = \frac{(-1)^k}{\pi}\frac{\sin(a\pi)}{(a-k)}$$

Op soortgelijke manier vinden we

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iax}\, e^{-ikx}\, dx = \frac{(-1)^k}{\pi}\frac{\sin(-a\pi)}{(-a-k)} = \frac{(-1)^k}{\pi}\frac{\sin(a\pi)}{(a+k)}.$$

Door middelen vinden we

$$c_k = \frac{(-1)^k}{2\pi}\sin(a\pi)\left(\frac{1}{a-k}+\frac{1}{a+k}\right) = \frac{(-1)^k}{2\pi}\sin(a\pi)\frac{2a}{a^2-k^2}.$$

Hieruit blijkt de in de opgave gegeven formule, met

$$C = \frac{a\sin(a\pi)}{\pi}.$$

(c) Er geldt dat

$$\lim_{|k|\to\infty} |c_k|/(1/k^2) = C\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{k^2-a^2} = 1.$$

Met het limietkenmerk volgt hieruit dat de reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|$ convergeert. Hieruit volgt dat f continu is, terwijl zijn Fourier-reeks absoluut uniform, dus uniform, convergeert op $\mathbb{R}$.

(d) De functie f is continu, en zijn Fourier-reeks convergeert uniform. Met een stelling concluderen we hieruit dat f gelijk is aan de som van zijn Fourier-reeks. In het bijzonder geldt in het punt $x = 0$ dat

$$1 = f(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2}.$$

De gevraagde formule in (c) volgt door beide leden met C^{-1} te vermenigvuldigen.

Terzijde: substitutie van de gevonden uitdrukking voor C levert de interessante formule

$$\frac{\pi}{a \sin(a\pi)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2},$$

voor elke $0 < a < 1$.