Tentamen functies en reeksen 10 november 2016

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert en de naam van je werkcollegeleider: Felix Beckebanze (groep 1), Francesco Cattafi (groep 2) of Ben Hansen (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Alle 13 deelopgaven tellen even zwaar, de bonus(deel)opgave telt iets minder zwaar.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- *SUCCES!*

1. Gegeven zijn $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ door middel van

$$f(x,y) \quad = \quad \left(x^2 y - \tfrac{1}{3}y^3, \tfrac{1}{3}x^3 - xy^2\right)$$

en $g = f \circ f$.

   (i) Ga na dat f (totaal) differentieerbaar is en bereken de afgeleide $Df(x,y)$.

   (ii) Controleer of $F(x + \mathrm{i}y) := f_1(x,y) + \mathrm{i}f_2(x,y)$ en/of $G(x + \mathrm{i}y) := g_1(x,y) + \mathrm{i}g_2(x,y)$ complex differentieerbare functies $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ zijn.

2. Beschouw op $\mathbb{R}^2$ de functie $f(t,x) = \dfrac{\cos(xt)}{\cosh t}$, waar $\cosh t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})$.

   (i) Laat zien dat $t \mapsto f(t,x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op $\mathbb{R}$.

   (ii) Ga na dat door

$$g(x) \quad := \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t$$

   een continue functie $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd.

   (iii) Verifieer dat de functie g differentieerbaar is en bereken de afgeleide g'.

3. Definieer $f_k(x) := \sin^k x = (\sin x)^k$ en beschouw de reeks

$$\sum_{k \geq 0} f_k \ . \tag{1}$$

(*i*) In welke punten $x \in \mathbb{R}$ is (1) puntsgewijs convergent? Wat is de limietfunctie g ? (Herinnering: laat duidelijk zien hoe je aan je antwoord komt.)

(*ii*) Op welke intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ convergeert (1) uniform naar g ?

4. Doel van deze opgave is om te laten zien dat eigenschappen van

$$\ell^2(\mathbb{Z}) \quad = \quad \left\{ x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \;\middle|\; \|x\| < \infty \right\} \ ,$$

waar

$$\|x\|^2 \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 \ , \tag{2}$$

kunnen worden gebruikt om uniforme convergentie van Fourier-reeksen aan te tonen.

(*i*) Ga na dat $\ell^2(\mathbb{Z})$ een complexe vectorruimte is en dat (2) daarop een norm definieert. *Hint:* neem de limiet $n \to \infty$ in (o.a.) de driehoeksongelijkheid op $\mathbb{C}^{2n-1} \cong \{x \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mid x_k = 0 \text{ voor alle } |k| \geq n\}$.

(*ii*) Laat zien dat $(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ een Hermite's inproduct op $\ell^2(\mathbb{Z})$ definieert en dat i.h.b. de in (2) gegeven norm voldoet aan $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

(*iii*) Toon aan dat de Fourier-reeks van $f \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ absoluut uniform convergent is. *Hint:* gebruik $\mathcal{F}(f')_k = \mathrm{i}k\mathcal{F}(f)_k$ en de ongelijkheid van Cauchy–Schwartz. Merk op dat meer gevraagd is dan alleen uniforme convergentie!

(*bonus*) Kun je (*iii*) generalizeren naar $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \cap C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$?

5. Beschouw de reeks $\sum_{k \geq 1} a_k$ in $\mathbb{R}$ met $a_k = \dfrac{(-1)^k}{k}$.

(*i*) Bewijs dat de reeks convergent is.

(*ii*) Bewijs dat de reeks niet absoluut convergent is.

(*iii*) Construeer een bijectie $\ell \mapsto k(\ell)$ van $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$ en dus een herschikking $b_\ell = a_{k(\ell)}$ waarvoor de reeks $\sum_{\ell \geq 1} b_\ell$ convergent is met limiet 0.