Hertentamen functies en reeksen 3 januari 2017

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert en de naam van je werkcollegeleider: Felix Beckebanze (groep 1), Francesco Cattafi (groep 2) of Ben Hansen (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Alle 13 deelopgaven tellen even zwaar.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- *SUCCES!*

1. Gegeven zijn $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ door middel van

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} x \cdot \sin y \\ \mathrm{e}^x \cdot \cos y \\ \mathrm{e}^{-x} \cdot y^2 \end{pmatrix}$$

$$g(u,v,w) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{uvw^2}{u^2+v^4+w^6} & \text{als } (u,v,w) \neq 0 \\ 0 & \text{als } (u,v,w) = 0 \end{cases}$$

en $h = g \circ f$.

(*i*) Bereken de (totale) afgeleide $Df(x,y)$ in alle punten waar deze bestaat.

(*ii*) Bereken de (totale) afgeleide $Dg(u,v,w)$ in alle punten waar deze bestaat.

(*iii*) Voor welke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ bestaat de (totale) afgeleide $Dh(x,y)$?

2. Beschouw de Fourier-reeks van de functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} -2-x & \text{als } -\pi \leq x < -1 \\ -1 & \text{als } -1 \leq x < 1 \\ x-2 & \text{als } 1 \leq x < \pi \end{cases}$$

en 2π–periodiek voortgezet. *Hint:* maak een plaatje.

(*i*) Toon aan dat de Fourier-reeks uniform op $\mathbb{R}$ naar f convergeert.

(*ii*) Bereken de Fouriercoëfficiënten van f.

(*iii*) Convergeert de Fourier-reeks ook absoluut uniform op $\mathbb{R}$ naar f ?

3. Beschouw op $[\pi,\infty[\,\times\,[\pi,\infty[$ de functie $f(t,x) = \dfrac{\sin(x+t)}{t}$.

(*i*) Laat zien dat $t \mapsto f(t,x)$ voor alle $x \in [\pi,\infty[$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op $[\pi,\infty[$.

(*ii*) Ga na dat door
$$g(x) \quad := \quad \int_\pi^\infty f(t,x)\,\mathrm{d}t$$
een differentieerbare functie $g : [\pi,\infty[\; \longrightarrow \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd en bereken de afgeleide g'.

4. Zij $n \in \mathbb{N}_0$ en $c_{k\ell} \in \mathbb{C}$ voor alle $k,\ell \in \mathbb{N}_0$ met $k+\ell \leq n$. Definieer hiermee
$$f(z) \quad := \quad \sum_{k+\ell=0}^{n} c_{k\ell} z^k \bar{z}^\ell \quad \text{en} \quad F(x,y) \quad := \quad f(x+\mathrm{i}y) \ .$$

(*i*) Toon aan dat $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(*ii*) Onder welke voorwaarde aan $(c_{k\ell})_{0\leq k+\ell\leq n}$ is f complex differentieerbaar?

5. Het volgende zal later worden toegepast op analytische functies.

(*i*) Gegeven zijn twee functies $f = f_1 + f_2 : [0,1[\; \longrightarrow \mathbb{R}$ en $g = g_1 + g_2 : [0,1[\; \longrightarrow\;]0,\infty[$ waarvoor de limieten $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)$ en $\lim\limits_{x\to 1} g_1(x)$ bestaan en $\lim\limits_{x\to 1} g_2(x) = \infty$. Toon aan dat de limiet
$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \mu$$
dan en slechts dan bestaat als de limiet
$$\lim_{x\to 1} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \quad = \quad \nu$$
bestaat en dat dan $\mu = \nu$.

Voor de rest van deze opgave beschouw de twee complexe machtreeksen

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k \quad \text{en} \quad \sum_{k\geq 0} b_k z^k$$

met reële coëfficiënten $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k > 0$ waarvoor de limiet

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \quad =: \quad \lambda$$

bestaat.

(*ii*) Veronderstel dat $\sum b_k z^k$ convergentiestraal $\rho = 1$ heeft en voor $z = 1$ divergent is. Ga na dat $\sum a_k z^k$ voor $|z| < 1$ absoluut convergent is en dat

$$\lim_{\substack{x\uparrow 1\\ 0\leq x<1}} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} \quad = \quad \lambda$$

voor de limiet $x \to 1$ onder de beperking $0 \leq x < 1$. *Hint:* wat weet je (voor willekeurige $n \in \mathbb{N}$) over $\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ en $\lim_{\substack{x\uparrow 1\\ 0\leq x<1}} \sum_{k\geq n} b_k x^k$?

(*iii*) Veronderstel dat $\sum b_k z^k$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ convergent is en laat zien dat $\sum a_k z^k$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ absoluut convergent is. Verifieer de limiet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} \quad = \quad \lambda$$

waar $x \to \infty$ onder de beperking $x \in \mathbb{R}$.