Tentamen 2017

Functies & Reeksen
Suzanne Vincken

Ex 1

(i) $\text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3|x+\pi|^3 e^{3y}$ continu, want

$\lim_{x \downarrow -\pi} 3|x+\pi|^3 e^{3y} = 0$

$\lim_{x \uparrow -\pi} 3|x+\pi|^3 e^{3y} = 0$

voor $\frac{\partial f}{\partial x}$ schrijf $f(x,y) = \begin{cases} (x+\pi)^3 e^{3y} & x \geq -\pi \quad (A) \\ (-x-\pi)^3 e^{3y} & x < -\pi \quad (B) \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 3(x+\pi)^2 e^{3y}$

$\lim_{x \downarrow -\pi} 3(x+\pi)^2 e^{3y} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(B) = -3(-x-\pi)^2 e^{3y}$

$\lim_{x \uparrow -\pi} -3(-x-\pi)^2 e^{3y} = 0$

Dus $\frac{\partial f}{\partial x}$ is continu.

Er volgt met stelling 1.24 dat f totaal differentieerbaar is.

(ii) Er geldt $Dg = (-\sin t, \cos t)$

Dus volgt er

$$Dg(t_0) = Dg(\pi^3) = (-\sin(\pi^3), \cos(\pi^3))$$

(iii)

$$h(x+iy) = \cos(|x+\pi|^3 e^{3y}) + i\sin(|x+\pi|^3 e^{3y})$$

we willen lemma 4.32 gebruiken.

TB: $\frac{\partial h_1}{\partial x}(a) = \frac{\partial h_2}{\partial y}(a)$, $\frac{\partial h_2}{\partial x}(a) = -\frac{\partial h_1}{\partial y}(a)$

$\boxed{\frac{\partial h_1}{\partial x}}$

$\underline{\underline{x \geq -\pi}}$

$$-\sin((x+\pi)^3 e^{3y}) \cdot 3(x+\pi)^2 e^{3y}$$

$$= -3e^{3y}(x+\pi)^2 \sin((x+\pi)^3 e^{3y})$$

Duidelijk continu.

zijn gelijk

$\underline{\underline{x \leq -\pi}}$

$$-\sin((-x-\pi)^3 e^{3y}) \cdot -3(-x-\pi)^2 e^{3y}$$

$$= 3e^{3y}(-x-\pi)^2 \cdot \sin((-x-\pi)^3 e^{3y})$$

$$= -3e^{3y}(x+\pi)^2 \sin((x+\pi)^3 e^{3y})$$

Duidelijk continu

Dus $\frac{\partial h_1}{\partial x}$ is continu.

$\boxed{\frac{\partial h_2}{\partial y}}$

$$\cos(|x+\pi|^3 e^{3y}) \cdot 3|x+\pi|^3 e^{3y}$$

Duidelijk continu.

Voor welke a geldt er dat $\frac{\partial h_1}{\partial x}(a) = \frac{\partial h_2}{\partial y}(a)$?

$$-3e^{3a_2}(a_1+\pi)^2\sin((a_1+\pi)^3e^{3a_2}) = \cos(|a_1+\pi|^3e^{3a_2})\,3|a_1+\pi|^3 \cdot e^{3a_2}$$

[merk op: $e^{3a_2}>0$, dus deze term
mogen we wegdelen
merk op: $|x+\pi|^3 = (x+\pi)^2|x+\pi|$

$$\Rightarrow -\sin((a_1+\pi)^3e^{3a_2}) = \cos(|a_1+\pi|^3e^{3a_2})\cdot|a_1+\pi| \quad \vee \quad (a_1+\pi)^2=0$$

[merk op $\cos(x) = \cos(-x)$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} -\sin((a_1+\pi)^3e^{3a_2}) = \cos((a_1+\pi)^3e^{3a_2})|a_1+\pi| \quad \vee \quad a_1=-\pi$$

Bekijk nu:

$\boxed{\frac{\partial h_2}{\partial x}(a)}$

$\underline{x\geq-\pi}$

[Merk op dat $(x+\pi) = |x+\pi|$
dus $(x+\pi)^2 = (x+\pi)|x+\pi|$

$$\cos((x+\pi)^3e^{3y})\cdot 3(x+\pi)^2e^{3y}$$
$$= \cos((x+\pi)^3e^{3y})\cdot 3(x+\pi)|x+\pi|e^{3y}$$

$\underline{x\leq-\pi}$

[Merk op dat $(x+\pi) = -|x+\pi|$
dus $(x+\pi)^2 = -(x+\pi)|x+\pi|$

$$\cos((-x-\pi)^3e^{3y})\cdot -3(-x-\pi)^2e^{3y}$$
$$= \cos((x+\pi)^3e^{3y})\cdot -3(x+\pi)^2e^{3y}$$
$$= \cos((x+\pi)^3e^{3y})\cdot 3(x+\pi)|x+\pi|e^{3y}$$

gelijk aan elkaar

Duidelijk continu

$$\boxed{-\frac{\partial h_1}{\partial y}(a)}$$

$$= -\sin(|x+\pi|^3 e^{3y}) \cdot -3|x+\pi|^3 e^{3y}$$

[Merk op $\sin(-x) \cdot -x = \sin(x) \cdot x$

$$= \sin((x+\pi)^3 e^{3y}) \cdot 3(x+\pi)^3 e^{3y}$$

voor welke a geldt er dat $\frac{\partial h_2}{\partial x}(a) = -\frac{\partial h_1}{\partial y}(a)$?

$$\cos((a_1+\pi)^3 e^{3a_2}) \cdot 3(a_1+\pi)|a_1+\pi| e^{3a_2} = \sin((a_1+\pi)^3 e^{3a_2}) \cdot 3(a_1+\pi)^3 e^{3a_2}$$

[Merk op $e^{3a_2} > 0$

(***)

$$\Rightarrow \cos((a_1+\pi)^3 e^{3a_2}) \cdot |a_1+\pi| = \sin((a_1+\pi)^3 e^{3a_2}) \cdot (a_1+\pi)^2$$

[Merk op $(a_1+\pi)^2 = |a_1+\pi|^2$

(**)

$$\Rightarrow \cos((a_1+\pi)^3 e^{3a_2}) = \sin((a_1+\pi)^3 e^{3a_2}) \cdot |a_1+\pi| \ \vee a_1 = -\pi$$

Uit zowel (*) als (**) volgt dat $a_1 = -\pi$ een oplossing geeft.

Uit (*) en (***) volgt nu dat

$$-\sin((a_1+\pi)^3 e^{3a_2}) = \sin((a_1+\pi)^3 e^{3a_2}) \cdot (a_1+\pi)^2$$

$$\Rightarrow (a_1+\pi)^2 = -1 \ \vee \ \sin((a_1+\pi)^3 e^{3a_2}) = 0$$

↳ geen opl.

↳ bekijk (*), als de linkerkant van (*) nul is, dan is de cosinus dat niet, dus moet $|a_1+\pi| = 0$ gelden en die oplossing hebben we al

We concluderen dat h complex diff'baar als $a \in \{(-\pi, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Ex2 | manier 1: merk op dat de integraal constant is.

manier 2: merk $\boxed{\text{niet}}$ op dat de integraal constant is

(i) $\boxed{m1}$ $\int_x^\infty e^{(x-t)^3}\,dt$

laat $-u = x-t$, dan $dt = du$

en $t = x+u$

Er volgt $\int_{t=x}^{t=\infty} e^{(x-t)^3} = \int_{u=0}^{u=\infty} e^{-u^3}\,du$

Merk op dat uit opmerking 2.13 volgt dat g lokaal Riemann-int'baar is.

Gebruik nu stelling 2.27. Er geldt:

(Δ) $\left|\int_0^\infty e^{-u^3}\,du\right| \le \int_0^1 1\,du + \int_1^\infty e^{-u}\,du$

$= [u]_0^1 + [-e^{-u}]_0^\infty$

$= 1 - e^{-\infty} + e^0 = 2.$

We concluderen dat g oneigenlijk Riemann-int'baar is.

En we concluderen dat g een functie van $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is.

$\boxed{M2}$ gebruik dezelfde afschatting, maar dan voor $\left|\int_x^\infty e^{(x-t)^3}\,dt\right|$.

(ii) $\boxed{M1+2}$

Bekijk $\left|\int_x^\infty e^{(x-t)^3}\,dt - \int_y^\infty e^{(x-t)^3}\,dt\right|$.

Voor $x<y$ geldt er dat dit gelijk is aan $\left|\int_x^y e^{(x-t)^3}\,dt\right|$.

laat $u=x-t$ dan $du=-dt$.

Dan volgt er dat dit gelijk is aan $\left|-\int_0^{x-y} e^{u^3}\,du\right|$.

Merk op dat $x-y<0$, dus krijgen we $\left|+\int_{x-y}^0 e^{u^3}\,du\right|$.

Merk op dat $e^{u^3}\leq 1$ op $(-\infty,0]$

oftewel: $\left|\int_{x-y}^0 e^{u^3}\,du\right| \leq 1\cdot|x-y|$

En $\lim_{y\to x} 1\cdot|x-y| = 0$

We concluderen dat

$$\lim_{y\to x}\int_y^\infty e^{(x-t)^3}\,dt = \int_x^\infty e^{(x-t)^3}\,dt.$$

(iii) $\boxed{M1}$ g is constant, dus g is differentieerbaar, en $g'=0$.

$\boxed{M2}$ Uit opgave 2.g (a) volgt dat

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{(x-x)^3} - \int_x^\infty \frac{\partial}{\partial x} e^{(x-t)^3}\,dt \qquad (x\in\mathbb{R}) \\ &= 1-\int_x^\infty 3(x-t)^2 e^{(x-t)^3}\,dt \\ &= 1-\left[-e^{(x-t)^3}\right]_{t=x}^{t=\infty} \\ &= 1+0-1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ex 3

(i) Stel dat $\sum_{k\geq 0} g_k$ puntsgewijs convergent is.
Dan volgt uit definitie 3.27 dat de rij $G_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$ en $\sum_{k\geq 0} g_k = \lim_{n\to\infty} G_n$.

Er volgt vanwege het gegeven $|f_k(x)| \leq g_k(x)$ dat $|F_n| = |\sum_{k=0}^{n} f_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k| \leq \sum_{k=0}^{n} g_k = G_n$.

merk op dat $|F_n|$ een stijgende rij is.
Er volgt nu $\lim_{n\to\infty} |F_n| \leq \lim_{n\to\infty} |G_n|$

Dus $|\sum_{k\geq 0} f_k|$ puntsgewijs convergent,

dus $\sum_{k\geq 0} f_k$ puntsgewijs convergent.

(ii) Stel dat $\sum_{k\geq 0} g_k$ uniform convergent is op $V=[0,1]$
Dan volgt er uit lemma 3.29 dat $\sum_{k\geq 0} g_k$ puntsgewijs convergent is op V en dat
$$\|\sum_{k=n}^{\infty} g_k\|_V \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

Uit opgave (i) volgt dat $\sum_{k\geq 0} f_k$ ook puntsgewijs convergent is. En vanwege het gegeven $|f_k(x)| \leq g_k(x)$ volgt er dat

$$0 \leq \|\sum_{k=n}^{\infty} f_k\|_V \leq \|\sum_{k=n}^{\infty} |f_k|\,\|_V \leq \|\sum_{k=n}^{\infty} g_k\|_V \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$$

Er volgt met lemma 3.29 dat $\sum_{k\geq 0} f_k$ uniform convergent is op $[0,1]$.

(iii)

<u>TB:</u> $\| \sum_{k=n}^{\infty} f_k \|_1 \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$

Stel dat $\sum_{k \geq 0} g_k$ uniform convergent is op $[0,1]$.

Er geldt: $\int_0^1 | \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) | \, dx \leq \int_0^1 \sum_{k=n}^{\infty} |f_k(x)| \, dx$

$$\leq \int_0^1 \sum_{k=n}^{\infty} g_k(x) \, dx$$

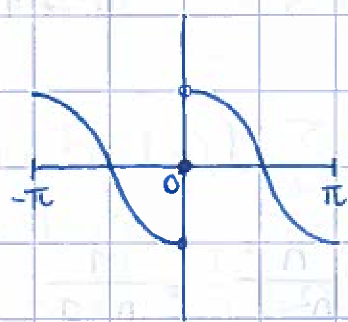
$$\leq (1-0) \| \sum_{k=n}^{\infty} g_k \|_{[0,1]}$$

Er volgt dat $\sum_{k \geq 0} f_k$ in het middel convergent is.

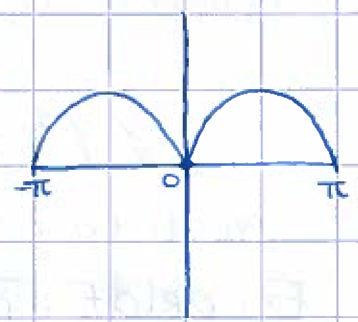
(iv) Antwoord = nee.
(Deze opgave is uiteindelijk meegerekend als bonusopgave.)

<u>Ex 4</u>

<u>Hint:</u> g:



h:



(i) $h(x)$ is continu en stuksgewijs glad $\hookrightarrow C^{st,\infty}$

gebruik stelling 5.48 en 5.26 om te concluderen dat $h(x)$ absoluut convergent is, dus convergent.

(ii) $$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{g(x)\cos(kx)}_{\text{oneven}}}_{=0} - i\,\underbrace{g(x)\sin(kx)}_{\text{even}}\,dx$$
$$= \frac{-i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(kx)\,dx$$
$$= \frac{-i}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(x)\sin(kx)\,dx$$
$$= \frac{-i}{\pi}\underbrace{\int_{0}^{\pi} \cos(x)\sin(kx)\,dx}\qquad (*)$$

$$= -\frac{1}{k}\cos(x)\cos(kx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(kx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{k}\cos(x)\cos(kx)\Big|_0^{\pi} - \underbrace{\frac{1}{k^2}\sin(x)\sin(kx)\Big|_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{k^2}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(kx)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\cos(x)\sin(kx)\,dx = \frac{(-1)^k+1}{k}\cdot\frac{k^2}{k^2-1} = \frac{k((-1)^k+1)}{k^2-1}$$

oftewel : $c_k = \frac{-i}{\pi}\cdot\frac{k((-1)^k+1)}{k^2-1}$ als $k \neq \pm 1$

voor $k = \pm$ geldt er (vanaf (*))

$$c_{\pm 1} = -\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(kx)\,dx$$
$$= \mp\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{\underbrace{\cos(x)}_{\text{even}}\ \underbrace{\sin(x)}_{\text{oneven}}}_{\text{oneven rond } \frac{\pi}{2}}\,dx$$

$= 0.$

(iii) $(c_k)_k \notin \ell^1(\mathbb{Z}) \iff \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|$ divergeert.

Merk op dat $c_k = \frac{-i}{\pi} \cdot \frac{k((-1)^k+1)}{k^2-1} = 0$ als k is oneven.

We bekijken (c_{2k}). Er geldt

$$\begin{aligned}(c_{2k}) &= \frac{-i}{\pi}\left(\frac{4k}{(2k)^2-1}\right) \\ &= \frac{-i}{\pi} \cdot \frac{4k}{4k^2-1} \\ &\geq -\frac{i}{\pi} \cdot \frac{4k}{4k^2} \qquad (\text{want } 4k^2-1 \leq 4k^2) \\ &= -\frac{i}{\pi} \cdot \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Er geldt nu dat $|(c_{2k})| \quad \frac{1}{\pi k}$.

Er volgt dat

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| &= \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_{2k+1}|}_{=0} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_{2k}| \\ &\geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi k} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k} \qquad (**)\end{aligned}$$

Vanwege lemma 3.22 geldt er dat $(**)$ divergeert. Er volgt dat $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|$ divergeert.

We concluderen dat $(c_k)_k \notin \ell^1(\mathbb{Z})$.