Hertentamen functies en reeksen 4 januari 2018

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert en de naam van je werkcollegeleider:

- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook nagaan dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Alle 13 deelopgaven tellen even zwaar.
- Boeken, cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- *SUCCES!*

1. Gegeven zijn $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ door middel van

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} (x+y)^2 \\ (x-y)^2 \\ 4y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{voor alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

en

$$g(u,v,w) \quad = \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u+v-w \\ u-v \end{pmatrix} \qquad \text{voor alle } (u,v,w) \in \mathbb{R}^3.$$

(*i*) Bereken de Jacobi-matrix van f en toon aan dat f (totaal) differentieerbaar is.

(*ii*) Bereken de Jacobi-matrix van g en toon aan dat g (totaal) differentieerbaar is. Wat valt op?

(*iii*) De compositie $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definieert op de gebruikelijke manier

$$h(x + \mathrm{i}y) \quad = \quad g_1(f(x,y)) \; + \; \mathrm{i}g_2(f(x,y)) \quad \text{voor alle } x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$$

een functie $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. In welke punten $z \in \mathbb{C}$ is h complex differentieerbaar?

2. Beschouw op $[1,\infty[\times \mathbb{R}$ de functie $f(t,x) = \mathrm{e}^{(x-t)^3}$.

   (i) Laat zien dat $t \mapsto f(t,x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op $[1,\infty[$.

   (ii) Ga na dat door
   $$g(x) \quad := \quad \int_1^\infty f(t,x)\,\mathrm{d}t$$
   een differentieerbare functie $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd en bereken de afgeleide g'.

3. Definieer $f_k(\frac{1}{2}\pi + j\pi) := 0$ voor $j \in \mathbb{Z}$, $f_k(x) := \tan^k x = (\tan x)^k$ voor $x \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat $x \neq \frac{1}{2}\pi + j\pi$ voor alle $j \in \mathbb{Z}$, en beschouw de reeks
   $$\sum_{k\geq 0} f_k \quad . \tag{1}$$

   (i) In welke punten $x \in \mathbb{R}$ is (1) puntsgewijs convergent? Wat is de limietfunctie g ?

   (ii) Op welke intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ convergeert (1) uniform naar g ?

4. Beschouw voor $z \in \mathbb{C}$ de machtreeks
   $$\sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad . \tag{2}$$

   (i) Ga na dat (2) op $\mathbb{C}$ absoluut uniform convergent is,

   (ii) Definieer $f(z)$ als de limiet van (2) en bereken de afgeleide $g(z) := f'(z)$.

   (iii) Laat zien dat $\int_0^x f(y)\mathrm{d}y = g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

   (iv) Zij $\sum_{k\geq 0} c_k z^k$ een machtreeks met convergentiestraal $\rho > 0$. Toon aan dat
   $$\int_a^b \sum_{k=0}^\infty c_k x^k \,\mathrm{d}x \quad = \quad \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k b^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k a^{k+1}}{k+1}$$
   voor alle $-\rho < a < b < \rho$.

5. Voor $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ schrijf $\mathcal{F}(f) = (c_k)_k$.

   (i) Toon aan dat indien f continu differentieerbaar en stuksgewijs C^3 is er een $\gamma > 0$ bestaat met de eigenschap $|c_k| \leq \dfrac{\gamma}{1+|k|^3}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

   (ii) Bewijs dat indien $f \in C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stuksgewijs C^{p+2} is er een $\Gamma > 0$ bestaat met de eigenschap $|c_k| \leq \dfrac{\Gamma}{1+|k|^{p+2}}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.