Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2003/2004 gegeven door Prof. Dr. J.J. Duistermaat.

Functies en Reeksen (WISB211)
9 november 2004

U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt. Motiveer steeds uw antwoord door duidelijk aan te geven welke argumenten en welke resultaten uit de syllabus u gebruikt om een bepaalde conclusie te trekken. Veel succes!

Opgave 1

Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar met continue afgeleide. Door te schrijven $z = x + \mathrm{i}y$ en $f = f_1 + \mathrm{i}f_2$, met $x, y \in \mathbb{R}$ en f_1, f_2 reëelwaardig, wordt expliciet gemaakt dat f als een $\mathbb{R}^2$-waardige functie van twee reële variabelen opgevat kan worden. In dit verband gebruiken we de notatie

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad D_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{etc.}$$

a) Toon aan dat op grond van in de syllabus geformuleerde stellingen geconcludeerd kan worden dat $D_j f_k$ bestaat voor $j = 1, 2$ en $k = 1, 2$.

b) Welke relaties bestaan er tussen deze partiële afgeleiden?

c) Druk $f'(z)$ uit in deze partiële afgeleiden.

d) Beargumenteer dat ook de tweede-orde partiële afgeleiden $D_1^2 f_k, D_1 D_2 f_k, D_2^2 f_k$ met $k = 1, 2$ bestaan.

e) Toon aan dat $D_1^2 f_k + D_2^2 f_k = 0$ voor $k = 1, 2$.

Achtergrond informatie $D_1^2 + D_2^2$ wordt ook wel geschreven als Δ, en oplossingen van de vergelijking $\Delta g = 0$ worden harmonische functies genoemd; ons eindresultaat zegt dus dat zowel het reële deel als het imaginaire deel van een complex differentieerbare functie met continue afgeleide een harmonische functie is.

Opgave 2

Zij $\omega = g_1(x, y)\,\mathrm{d}x + g_2(x, y)\,\mathrm{d}y$ gedefinieerd op $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, met

$$g_1(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + 2x \quad , \quad g_2(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + 2y$$

a) Toon aan dat ω gesloten is.

b) Toon aan dat ω niet exact is op U.
Hint: bereken $\int_\gamma \omega$ *waarbij* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$*,* $0 \le t \le 2\pi$ Definieer voor reële getallen a, b

$$\gamma_{a,b}(t) = (a + \cos t, b + \sin t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

en voor $a^2 + b^2 \neq 1$

$$I(a, b) = \int_{\gamma_{a,b}} \omega$$

c) Bepaal, met of zonder rekenwerk, $I(2,0)$.

d) Hoeveel verschillende waarden neemt I aan?

e) Wat zijn deze waarden?

f) Op welke gebieden in het (a,b)-vlak worden deze waarden aangenomen?

Opgave 3

a) Bepaal een functie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zó dat

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{g(z)}{z-1}$$

b) Toon aan dat

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{z^2-1}\, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\, g(1)$$

waarbij de familie γ_ϵ van gesloten C^1 krommen gedefinieerd is door

$$\gamma_\epsilon(t) = 1 + \epsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi \ , \ \epsilon > 0.$$

c) Bepaal zonder rekenwerk

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2-1}\, \mathrm{d}z$$

d) Omschrijf voorwaarden voor een gesloten C^1 kromme α die garanderen dat

$$\int_{\alpha} \frac{1}{z^2-1}\, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2-1}\, \mathrm{d}z$$

e) Maak aannemelijk dat deze voorwaarden ook voldoende zijn voor een gesloten keten van C^1 krommen.

f) Bewijs, via een limietprocedure toegepast op een gesloten keten van C^1 krommen, dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x = \pi$$