Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2005/2006 gegeven door Dhr. O. Diekmann.

Uitwerking[1] Functies en Reeksen (WISB211)
8 november 2005

Opgave 1

Merk allereerst op dat de functie

$$F : [0,1] \times [1,\infty) \to \mathbb{R}$$

gedefinieerd door

$$F(x,t) = xte^{-t}$$

continu is.

a) Een stelling uit de syllabus (stelling 2.5, blz. 25 om precies te zijn) zegt dat bijgevolg

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

gedefinieerd door

$$f(x) = \int_1^2 F(x,t)dt$$

continu is.

b) $F(0,t) = 0$ en dus geldt

$$\int_1^\beta F(0,t)dt = 0$$

zodat ook

$$g(0) := \lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta F(0,t)dt = 0.$$

Voor $x \in [0,1]$ en $t \geq 1$ geldt dat $0 \leq t^{-1-x} \leq 1$ en dus ook dat

$$0 \leq F(x,t) \leq e^{-t}.$$

Hieruit volgt dat de oneigenlijke integraal

$$g(x) = \lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta F(x,t)dt$$

bestaat voor $x \in [0,1]$ en dat

$$0 \leq \int_\beta^\infty F(x,t)dt \leq \int_\beta^\infty e^{-t}dt = e^{-\beta}.$$

Voor alle $x \in [0,1]$ en voor $\eta > 0$ geldt dus

$$\left| \int_\beta^\infty F(x,t)dt \right| \leq \eta$$

[1]Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@a-eskwadraat.nl

als maar geldt dat $\beta \geq \max\{0, -\log \eta\}$. Een resultaat in de syllabus (beschreven in Opmerking 2.8, blz. 27) zegt dat hieruit volgt dat g continu is. Met name geldt dus dat $\lim_{x\downarrow 0} g(x) = g(0)$.

c)
$$\int_1^\beta x t^{-1-x} dt = \left[-t^{-x} \right]_1^\beta = 1 - \beta^{-x}.$$
Voor $x > 0$ geldt $\lim_{\beta\to\infty} \beta^{-x} = 0$ en dus $h(x) = 1$. Voor $x = 0$ geldt $\beta^{-x} = 1$ en dus geldt $h(0) = 0$.
Conclusie:
$$\lim_{x\downarrow 0} h(x) = 1 \neq 0 = h(0).$$

Opgave 2

a) De functies g_1 en g_2 zijn continu differentieerbaar op het complement van de oorsprong. Verder geldt
$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y).$$
Volgens de definitie (3.16 op blz. 47) is ω gesloten.

b) De uitspraak "die de oorsprong **niet** omsluit " betekent dat γ samentrekbaar is in U, d.w.z. dat γ in U homotoop is met een constante kromme. De lijnintegraal over een constante kromme is nul. Een resultaat in de syllabus (gevolg 3.19, blz. 49) zegt dat $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$ als ω een gesloten continu differentieerbare differentiaalvorm op U is en α en β zijn gesloten C^1 krommen die homotoop in U zijn. Dus geldt $\int_\gamma \omega = 0$.

c) Volgens een resultaat in de syllabus (Lemma 3.24, blz. 50) is γ homotoop met δ gedefinieerd door
$$\delta(t) = (\cos t, \sin t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$
en
$$\int_\delta \omega = \int_0^{2\pi} \{(\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\sin t - \cos t)\cos t\}\, dt = \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi.$$
Dus geldt
$$\int_\gamma \omega = \int_\delta \omega = -2\pi$$

d) Nee, want dan zou moeten gelden dat $\int_\gamma \omega = 0$ voor elke gesloten C^1 kromme in U en bij onderdeel (c) hebben we gevonden dat $\int_\gamma \omega = -2\pi$ tot de mogelijkheden behoort.

e) Definieer

$$\delta_k(t) = (\cos kt, \sin kt), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

dan is γ homotoop met δ_k (Lemma 3.24, blz. 50) en

$$\int_{\delta_k} \omega = \int_0^{2\pi} \{(\cos kt + \sin kt)(-k \sin kt) + (\sin kt - \cos kt) k \cos kt\}\, dt = \int_0^{2\pi} (-k) dt = -2\pi k.$$

Men kan ook als volgt redeneren. Zij γ_1 een gesloten C^1 kromme waarvoor geldt $W_{(0,0)}(\gamma_1) = 1$. Dan is γ homotoop met de kromme die verkregen wordt door γ_1 k-keer achter elkaar te doorlopen (ook dit volgt uit Lemma 3.24). Bij onderdeel (c) vonden we $\int_{\gamma_1} \omega = -2\pi$. Uit de definitie van de lijnintegraal volgt dat $\int_\gamma \omega = k \int_{\gamma_1} \omega$. Dus geldt

$$\int_\gamma \omega = -2\pi k$$

Opgave 3

Definieer $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ door

$$\tilde{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \ x + iy \in U \right\}$$

en $\tilde{h} : \tilde{U} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ door

$$\tilde{h}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t \right) = \begin{pmatrix} \text{Re } h(x+iy,t) \\ \text{Im } h(x+iy,t) \end{pmatrix}$$

en tot slot $\tilde{g} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^2$ door

$$\tilde{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_0^1 \tilde{h}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t \right) dt$$

a) Een resultaat in de syllabus (Stelling 4.16, blz. 70) garandeert dat voor iedere $t \in [0,1]$ de afbeelding

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \tilde{h}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t \right)$$

totaal differentieerbaar is en dat de Cauchy-Riemann vergelijkingen

$$\frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{h}_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{h}_2}{\partial x}$$

gelden. Bovendien zijn de partiële afgeleiden continue functies van $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t \right)$ omdat $(z,t) \mapsto \frac{\partial h}{\partial z}(z,t)$ continu is.

b) Een resultaat uit de syllabus (Gevolg 2.12, blz. 29) zegt dat hieruit volgt dat de partiële afgeleiden van de componenten van $\tilde{g}$ bestaan, continu zijn en gegeven worden door

$$\frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t \right) dt \qquad \text{etc.}$$

Het bestaan en de continuiteit van de partiéle afgeleiden garandeert dat $\tilde{g}$ totaal differentieerbaar is (Stelling 1.15, blz. 9). Uit de Cauchy-Riemann vergelijkingen voor $\tilde{h}$ en de formule voor $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ etc. volgt dat $\tilde{g}$ aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoet. We kunnen nu Stelling 4.16 de andere kant op gebruiken en concluderen dat g complex differentieerbaar is en dat als $z = x + iy$

$$g'(z) = \frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + i\frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_0^1 \left\{ \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t\right) + i\frac{\partial \tilde{h}_2}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t\right)\right\} dt$$
$$= \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z}(z,t)dt$$

c) Volgens de definitie (4.28, blz. 75) is

$$F(z) = \int_0^1 f(tz)zdt$$

Definieer daarom $h(z,t) = f(tz)z$ dan voldoet h aan alle voorwaarden in onderdeel (a), met name is

$$\frac{\partial h}{\partial z}(z,t) = f(tz) + f'(tz)tz$$

een continue functie van (z,t). We kunnen dus uit (a) concluderen dat F complex differentieerbaar is met afgeleide

$$F'(z) = \int_0^1 (f(tz) + f'(tz)tz)dt.$$

Via partiële integratie volgt

$$\int_0^1 f'(tz)ztdt = \Big[f(tz)t\Big]_0^1 - \int_0^1 f(tz)dt = f(z) - \int_0^1 f(tz)dt.$$

Dus geldt $F'(z) = f(z)$.