Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2005/2006 gegeven door Odo Diekmann.

Uitwerking[1] Functies en Reeksen (WISB211) 2 februari 2006

Opgave 1

a) $g(x) - g(y) = g(x) - f_k(x) + f_k(x) - f_k(y) + f_k(y) - g(y)$ en dus

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - g(y)|$$

Uit uniforme convergentie van f_k naar g volgt dat $\forall_{\epsilon>0}\exists_{K=K(\epsilon)}$ zó dat $\forall_{x\in\mathbf{R}}$ geldt

$$|g(x) - f_k(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

voor $k \geq K$. Hieruit volgt dat zowel de 1^e als de 3^e term aan de rechterkant van bovenstaande ongelijkheid afgeschat kunnen worden met $\frac{\epsilon}{3}$ als maar $k \geq K$. Fixeer nu een k die voldoet aan $k \geq K$. Uit de uniforme continuiteit van f_k volgt dat $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta=\delta(\epsilon)}$ zó dat voor alle $x, y \in \mathbf{R}$ die voldoen aan $|x - y| < \delta$ geldt dat $|f_k(x) - f_k(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. Dus geldt $\forall_{x,y\in\mathbf{R}}$ met $|x - y| < \delta$ dat

$$|g(x) - g(y)| < \epsilon.$$

b)

$$g(x) - h_k(x) = g(x) - g(x + 1/k) + g(x + 1/k) - f_k(x + 1/k)$$

en dus

$$|g(x) - h_k(x)| \leq |g(x) - g(x + 1/k)| + |g(x + 1/k) - f_k(x + 1/k)|.$$

Omdat g uniform continu is bestaat $\forall_{\epsilon>0}$ een $K_1 = K_1(\epsilon)$ zó dat voor alle $x \in \mathbf{R}$ geldt

$$|g(x) - g(x + \frac{1}{k})| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

voor $k \geq K_1$. Uit het feit dat f_k uniform naar g convergeert voor $k \to \infty$ volgt dat $\forall_{\epsilon>0}\exists_{K_2=K_2(\epsilon)}$ zó dat

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |g(x + \frac{1}{k}) - f_k(x + \frac{1}{k})| = \sup_{y\in\mathbf{R}} |g(y) - f_k(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

voor $k \geq K_2$. Voor $k \geq \max(K_1, K_2)$ geldt dus dat $|g(x) - h_k(x)| < \epsilon$, voor alle $x \in \mathbf{R}$.

Opgave 2

a) Volgens Lemma 5.18, p. 106

$$\rho = 1/\left(\lim_{N\to\infty} \sup_{k\geq N} \left(\frac{3^k}{k}\right)^{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1}{3}$$

immers, $\lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{k}} = 1$.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@A-Eskwadraat.nl`

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3z)^k}{k} = -\log(1-3z) \quad \text{voor } |z| < \frac{1}{3}$$

Behalve voor $z = 1/3$, is het rechterlid welgedefinieerd voor alle z met $|z| = 1/3$. In het op het prakticum behaldelde vraagstuk 5.13 wordt middels het Convergentiecriterium van Dirichlet aangetoond dat de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

convergeert, naar $-\log(1-z)$, voor alle $z \leq 1$ met $z \neq 1$. Vertalen we dat resultaat naar de huidige situatie, dan zien we dat de machtreeks convergeert voor alle punten op de cirkel met straal $\frac{1}{3}$ (en middelpunt 0), behalve $z = \frac{1}{3}$.

c) Volgens Gevolg 5.26, p. 109, is de convergentiestraal van de Taylor-reeks van f in het punt $z = \frac{1}{6}$ gelijk aan de afstand van $\frac{1}{6}$ tot $\frac{1}{3}$ (omdat f geen complex analytische uitbreiding heeft tot een open omgeving van $z = \frac{1}{3}$ en wel tot een open omgeving van elk ander punt in $\mathbb{C}$). Dus is de convergentiestraal van de Taylor-reeks van f in het punt $z = \frac{1}{6}$ gelijk aan $\frac{1}{6}$.

Opgave 3

a) $f, g \in C^2$, of in woorden, f en g zijn twee keer continu differentieerbaar. Zie Stelling 6.15, p. 130.

b)

$$\begin{aligned} |f(x)\overline{g(x)} - s_l(x)\overline{t_l(x)}| &= |(f(x) - s_l(x))\overline{g(x)} + s_l(x)(\overline{g(x) - t_l(x)})| \\ &\leq |(f(x) - s_l(x))\overline{g(x)}| + |s_l(x)(\overline{g(x) - t_l(x)})| \\ &= |g(x)||f(x) - s_l(x)| + |s_l(x)||g(x) - t_l(x)|. \end{aligned}$$

Stel nu dat voor zekere $K > 0$ geldt dat

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |g(x)| \leq K \quad , \quad \sup_{l \geq 0} \sup_{x \in \mathbf{R}} |s_l(x)| \leq K$$

dan volgt

$$|f(x)\overline{g(x)} - s_l(x)\overline{t_l(x)}| \leq K \left(|f(x) - s_l(x)| + |g(x) - t_l(x)|\right),$$

en aangezien, volgens de aannamen, het rechterlid uniform in x naar 0 gaat voor $l \to \infty$, geldt dat ook voor het linkerlid. Omdat g continu en 2π-periodiek is, is g begrensd. Voor een gegeven l geldt hetzelfde voor $s_l(x)$. En dus is ook $\sup_{0 \leq l \leq L_0} \sup_{x \in \mathbf{R}} |s_l(x)|$ eindig voor ieder getal L_0. In principe zou de bovengrens echter naar oneindig kunnen gaan als L_0 naar oneindig gaat. Dat dat niet gebeurt tonen we als volgt aan: zij L_0 zó dat

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |s_l(x) - f(x)| \leq 1$$

voor $l \geq L_0$. Dan volgt uit

$$|s_l(x)| \leq |s_l(x) - f(x)| + |f(x)|$$

dat

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |s_l(x)| \leq 1 + \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$$

voor $l \geq L_0$. De conclusie is dat er een zekere $K > 0$ te vinden is waarvoor de hierboven aangenomen afschattingen geldig zijn.

c) Omdat zowel $s_l\overline{t_l}$ als $f\overline{g}$ continu, en dus Riemann-integreerbaar zijn, en omdat volgens onderdeel **b** geldt dat $s_l\overline{t_l}$ uniform naar $f\overline{g}$ convergeert voor $l \to \infty$, kunnen we limiet nemen en integreren verwisselen (Lemma 5.3, p. 96). Dus

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s_l(\theta)\overline{t_l(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

Verder geldt dat

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s_l(\theta)\overline{t_l(\theta)}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=-l}^{l} c_k \mathrm{e}^{ik\theta} \sum_{j=-l}^{l} \overline{d_k}\mathrm{e}^{-ij\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k,j=-l}^{l} c_k\overline{d_j}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(k-j)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k,j=-l}^{l} c_k\overline{d_j}\delta_{kj} = \sum_{n=-l}^{l} c_n\overline{d_n}.
\end{aligned}$$

We kunnen dus ook schrijven

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \lim_{l\to\infty}\sum_{n=-l}^{l} c_n\overline{d_n}.$$

d) Er geldt $\lim_{l\to\infty} ||f - s_l|| = 0$. In feite,

$$||f - s_l||^2 = \sum_{k\geq l+1} |c_k|^2,$$

zie Stelling 6.3.2, pagina 146.

e)

$$< f, g > = < f - s_l, g > + < s_l, g - t_l > + < s_l, t_l >$$

Volgens Cauchy-Schwarz geldt $| < f - s_l, g > | \leq ||f - s_l||\ ||g||$, en het rechterlid van deze ongelijkheid gaat, volgens **d**, naar nul voor $l \to \infty$. Evenzo geldt $| < s_l, g - t_l > | \leq ||s_l||\ ||g - t_l||$ en

$$||s_l|| = \left(\sum_{k=-l}^{l} |c_k|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2\right)^{1/2} = ||f||$$

dus ook hier geldt dat het rechterlid naar nul gaat voor $l \to \infty$. Er moet dus gelden

$$\lim_{l\to\infty} < s_l, t_l > = < f, g >$$

en bij onderdeel **c** hebben we al aangetoond dat

$$< s_l, t_l > = \sum_{k=-l}^{l} c_n\overline{d_n}.$$