

Functies en Reeksen, hertentamen (WISB211)

23 maart 2006

U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt. Motiveer steeds uw antwoord door duidelijk aan te geven welke argumenten en welke resultaten uit de syllabus u gebruikt om een bepaalde conclusie te trekken. Veel succes!

Opgave 1

Nota bene: bij deze opgave bouwen de deelopgaven minder op elkaar voort dan meestal het geval is bij tentamenopgaven.

De functie $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ is gedefinieerd door

$$f_1(x, y) = x^2 - y^2 \quad , \quad f_2(x, y) = 2xy$$

ofwel

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

De functie $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ is gedefinieerd door

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

- Bereken *met behulp van de kettingregel* de afgeleide van de compositie $f \circ \gamma$ (dus van $t \mapsto f(\gamma(t))$).
- Bereken de lijnintegraal over de kromme γ van de differentiaalvorm

$$\omega = f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$$

- Is ω gesloten?

Door te schrijven

$$z = x + iy \quad , \quad f(z) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$$

vatten we f op als afbeelding van \mathbf{C} naar \mathbf{C} . Door te schrijven $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$ vatten we ook γ op als \mathbf{C} waardig.

- Is f complex differentieerbaar in ieder punt van \mathbf{C} ?
- Bereken nu de complexe lijnintegraal van f over γ .

Opgave 2

Definieer $f : \mathbf{C} \setminus \{-i, i\} \rightarrow \mathbf{C}$ door

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

en definieer voor $\epsilon > 0$ de gesloten gladde kromme $\gamma_\epsilon : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ door

$$\gamma_\epsilon(t) = -i + \epsilon e^{it}.$$

- Toon aan dat

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = -\pi$$

- b) Bepaal $\int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz$ voor $0 < \epsilon \leq 1$. Vermeld expliciet van welke eigenschappen van γ_ϵ en f gebruik gemaakt wordt in deze redenering.
- c) Aan welke voorwaarden moet een gesloten keten van C^1 krommen α voldoen opdat geldt

$$\int_\alpha f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

(Illustreer je antwoord met een schets en geef daarin ook aan in welke richting α doorlopen wordt.)

- d) Zij $\delta_r(t) = re^{it}$ voor $-\pi \leq t \leq 0$. Toon aan dat

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\delta_r} f(z) dz = 0.$$

- e) Bewijs via een handige keuze van een één-parameter familie van gesloten ketens van C^1 krommen α_r , en het nemen van de limiet $r \rightarrow \infty$, dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi.$$

Tip: geef een schets van α_r voor een representatieve r .

Opgave 3

- a) Bepaal de Fourier-reeks van $(\sin x)^4$.
Hint: $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

- b) Hoe kun je de Fourier coëfficiënten van

$$4(\sin x)^3 \cos x$$

uit die van $(\sin x)^4$ bepalen?

- c) Formuleer de identiteit van Parseval voor Fourier-reeksen.
- d) Bereken

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin x)^6 (\cos x)^2 dx.$$

- e) Zij E een lineaire ruimte over \mathbf{C} en zij $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een Hermite's inproduct op E . Zij K een indexverzameling en zij ϵ_k , $k \in K$, een orthonormaal stelsel in E .
 Formuleer de ongelijkheid van Bessel. Onder welke extra voorwaarde op het stelsel $\{\epsilon_k\}_{k \in K}$ is deze ongelijkheid in feite een gelijkheid?