Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2006/2007 gegeven door O. Diekman.

Functies en Reeksen (WISB211)
7 november 2006

Opgave 1.

Zij $f : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continu en zij $\xi \in \mathbb{R}^2$. Definieer $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door

$$I(x) = \int_0^1 f(\langle x, \xi \rangle, t)dt$$

waarbij $\langle x, \xi \rangle := x_1\xi_1 + x_2\xi_2$.

a) Toon aan dat I continu is

b) Onder welke aanvullende voorwaarde(n) op f is I continu differentieerbaar?

c) De totale afgeleide van I in $x = 0$ is een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Laat zien hoe deze lineaire afbeelding gedefinieerd is in termen van een partiële afgeleide van f, ξ en integratie (m.a.w., geef een "formule" voor de afgeleide in $x = 0$, er van uitgaande dat deze bestaat en dat aan de voorwaarden voor differentiatie onder het integraalteken is voldaan).

Opgave 2.

Zij $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ een continu differentieerbare functie. Zij $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ en definieer op U de differentiaalvorm

$$\omega = xh(x^2 \ + \ y^2)dx \ + \ yh(x^2 + y^2)dy$$

a) Is ω gesloten?

b) Zij γ een gesloten C^1-kromme in U met windingsgetal $W_{(0,0)}(\gamma) = 0$. Toon aan dat $\int_\gamma \omega = 0$.

c) Zij nu $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ voor $0 \leq t \leq 2\pi$. Toon aan dat ook deze kromme γ geldt dat $\int_\gamma \omega = 0$.

d) Zij nu γ een willekeurige gesloten C^1-kromme met $W_{(0,0)} \neq 0$. Toon aan dat $\int_\gamma \omega = 0$.

e) Is ω exact?

f) Geef, in termen van h, een functie $f : U \to \mathbb{R}$ zó dat voor een willekeurige C^1-kromme $\gamma : a, b \to U$ geldt dat $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Opgave 3.

a) Bepaal een functie $g : \mathbb{C}\backslash\{-1\} \to \mathbb{C}$ zó dat

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{g(z)}{z-1}$$

b) Toon aan dat

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{z^2-1} dz = 2\pi i \; g(1)$$

waarbij de familie γ_ϵ van gesloten C^1-krommen gedefinieerd is door

$$\gamma_\epsilon(t) = 1 + \epsilon e^{it} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi \; , \; \epsilon > 0.$$

c) Bepaal zonder rekenwerk

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{z^2-1} dz \quad \text{voor} \quad \epsilon = 1$$

d) Omschrijf de voorwaarden waar een gesloten keten α van C^1-krommen aan moet voldoen opdat

$$\int_\alpha \frac{1}{z^2-1} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2-1} dz$$

e) Het is mogelijk de identiteit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \; = \; \pi$$

af te leiden uit de voorafgaande onderdelen door een éénparameter familie α_R van gesloten ketens van C^1-krommen te kiezen en dan de limiet $\mathbb{R} \to \infty$ te nemen. Geef deze afleiding.