DEPARTEMENT WISKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISB211 WERD IN 2007/2008 GEGEVEN DOOR O. DIEKMANN.

Functies & Reeksen (WISB211)
8 november 2007

U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt. Motiveer steeds uw antwoord door duidelijk aan te geven welke argumenten en welke resultaten uit de syllabus u gebruikt om een bepaalde conclusie te trekken. Gebruik voor elk van de drie opgaven svp een apart blad en voorzie dat van uw naam (dit ivm verdeling van nakijkwerk). Veel succes!

Opgave 1

Zij $\omega = g_1(x,y)dx + g_2(x,y)dy$ gedefinieerd op $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ met

$$g_1(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} \qquad \text{en} \qquad g_2(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

a) Toon aan dat ω gesloten is.

b) Zij γ een gesloten C^1 kromme waarvoor het windingsgetal $W_{(0,0)}(\gamma)$ van γ om de oorsprong gelijk is aan 1. Toon aan dat $\int_\gamma \omega = 2\pi$.

c) Is ω exact?

Definieer voor $s \in \mathbb{R}$

$$\gamma_s(t) = (s + \cos t, s + \sin t)\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

en voor $s \neq \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$I(s) = \int_{\gamma_s} \omega.$$

d) Bepaal, met of zonder rekenwerk, $I(1)$.

e) Hoeveel verschillende waarden neemt I aan?

f) Wat zijn deze waarden?

g) Op welke intervallen worden deze waarden aangenomen?

Opgave 2

Definieer $F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ door

$$F(x,y) = \int_x^1 \left(\frac{(y-t)^2}{\sqrt{t}} + t \right) e^{-t} dt \qquad \text{voor} \qquad x > 0$$

en

$$F(0,y) = \lim_{x \downarrow 0} F(x,y). \qquad \text{(Deze limiet bestaat!)}$$

Definieer $G : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ door $G(x) = F(x,x)$.

a) Zij $x > 0$. Is $y \mapsto F(x,y)$ continu?

b) Bestaan de partiële afgeleiden van F in een punt (x,y) met $x > 0$? Zo ja, bereken deze partiële afgeleiden.

c) Is F totaal differentieerbaar in een punt (x,y) met $x > 0$?

d) Is G differentieerbaar in een punt $x > 0$? Zo ja, bereken $G'(x)$.

e) Is $y \mapsto F(0,y)$ continu?

Opgave 3

Zij $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ een complexe veeltermfunctie van de graad n. Zij z_0 een gegeven punt in $\mathbb{C}$. Veronderstel dat $p'(z_0) \neq 0$.

a) Toon aan dat
$$p(z) - p(z_0) = (z - z_0)h(z),$$
waarbij $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ een complexe veeltermfunctie van de graad $n-1$ is.

b) Toon aan dat $h(z_0) = p'(z_0)$.

c) Zij γ_r de gesloten kromme gedefinieerd door
$$\gamma_r(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \qquad \text{voor } 0 \leq t \leq 2\pi.$$
Bewijs dat geldt
$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{1}{p(z) - p(z_0)} dz = \frac{1}{p'(z_0)}$$
voor $r > 0$ maar r niet te groot.

d) Laten $z_1, \ldots, z_{n-1}$ de nulpunten van h zijn. Geef in termen van $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ een scherpe bovengrens voor r.

e) **Bonus.** *(Met de reguliere opgaven kunt u 30 punten verdienen en met deze bonus opgave twee punten extra.)*
Toon aan dat
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta} = \frac{2\pi}{3}.$$
Hint: beschouw $p(z) = z^2 - 2\frac{1}{2}z + 1$ en $z_0 = \frac{1}{2}$ en een homotopie die γ_r en de éénheidscirkel met elkaar verbindt.