Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2007/2008 gegeven door O. Diekmann.

Functies & Reeksen (WISB211)
herkansing, 18 maart 2008

U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt. Motiveer steeds uw antwoord door duidelijk aan te geven welke argumenten en welke resultaten uit de syllabus u gebruikt om een bepaalde conclusie te trekken. Veel succes!

Opgave 1

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu en zij $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. Definieer $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door

$$J(w, x) := \int_0^w g(x - y) f(y)\, \mathrm{d}y$$

en $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$I(x) := J(x, x).$$

a) Toon aan dat J partieel differentieerbaar is naar beide variabelen en bereken de partiële afgeleiden.

b) Toon aan dat J totaal differentieerbaar is en specificeer de totale afgeleide van J in een willekeurig punt $(w, x) \in \mathbb{R}^2$.

c) Toon aan dat I differentieerbaar is en bereken de afgeleide.

d) Stel nu dat g continu is (en *niet* continu differentieerbaar) terwijl f continu differentieerbaar is. Toon aan dat I differentieerbaar is en bereken de afgeleide.
Hint: bedenk een transformatie van de integratievariabele in de uitdrukking voor $I(x)$ zó dat g en f van rol verwisselen.

Opgave 2

Zij $\omega = g_1(x, y)\, \mathrm{d}x + g_2(x, y)\, \mathrm{d}y$ gedefinieerd op de deelverzameling van $\mathbb{R}^2$

$$U = \{(x, y) : x > 0\}$$

door

$$g_1(x, y) = -\frac{y}{x^2}, \qquad g_2(x, y) = \frac{1}{x}.$$

a) Toon aan dat ω gesloten is.

b) Toon aan dat ω exact is.

c) Zij $x > 0$ en zij $y > 0$. Definieer $\gamma : [0, y] \to U$ door

$$\gamma(t) = (x, t).$$

Bereken $\int_\gamma \omega$.

d) Bepaal een functie $f : U \to \mathbb{R}$ zó dat $\frac{\partial f}{\partial x} = g_1$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = g_2$.

Opgave 3

Laten f en g op $\mathbb{R}$ gedefinieerde complexwaardige functies zijn die continu en 2π-periodiek zijn, oftewel, $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. We definieren voor $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

a) Toon aan dat $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

b) We geven de Fourier-coëfficiënten van f aan met c_k, die van g met d_k en die van h met e_k. We geven dit ook wel aan met $c = \mathcal{F}(f)$, $d = \mathcal{F}(g)$ en $e = \mathcal{F}(h)$. Toon aan dat

$$e_k = 2\pi c_k d_k.$$

c) Beschouw als gegeven dat

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \bar{q}_k$$

een Hermite's inproduct definieert op de ruimte ℓ^2 van complexe rijtjes $p = \{p_k\}$ waarvoor $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |p_k|^2 < \infty$. Leid hieruit af dat voor $p, q \in \ell^2$ geldt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |p_k||q_k| \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |p_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |q_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hint: als $p \in \ell^2$ dan behoort ook het rijtje $\{|p_k|\}$ tot ℓ^2.

d) Toon aan dat $c, d \in \ell^2$. Tot welke conclusie met betrekking tot e leidt toepassing van de in c) afgeleide ongelijkheid?

e) Convergeert de Fourier-reeks van h? Zo ja, is de convergentie uniform? Zo ja, is de som gelijk aan h?