ANALYSE IN MEER VARIABELEN IN BLOK 3, 17 APRIL 2012, 13:30-16:30

- Maak hooguit één som per blad en schrijf op ieder blad je naam en studentnummer.
- Wees helder en bondig.

De nummers tussen vierkante haakjes [ ] geven het waarderingspercentage aan. Kort na het tentamen is de uitwerking van de opgaven beschikbaar op de webpagina van het college.

(1) [Neem een nieuw blad; 30] Laat f de beperking zijn van de functie $5x^2 + 4y + 8z$ tot het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Bepaal de kritieke punten van f en de waarden van f in deze punten.

(2) [Neem een nieuw blad; 35] Laat $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2 - y^2$. Voor iedere $c \in \mathbb{R}$ beschouwen we de niveaufiguur $V_c = f^{-1}(c)$.
  (a) [30] Bepaal de waarden van c waarvoor V_c *geen* 1-dimensionale C^1-deelvariëteit is van $\mathbb{R}^2$ en geef voor deze waarden van c ook de punten waar V_c in deze tekort schiet (toon in het bijzonder aan dat V_c daar inderdaad geen 1-dimensionale C^1-deelvariëteit is).
  (b) [5] Is V_c die punten überhaupt een deelvariëteit?

(3) [Neem een nieuw blad; 35] Zij $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ een C^2-immersie die periodiek is modulo 2π. Noem zijn beeld B.
  (a) [10] Bewijs dat B begrensd is.
  (b) [10] Beschouw de afbeelding $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door
$$\Gamma(t, s) = (\gamma_1(t) - s\dot{\gamma}_2(t), \gamma_2(t) + s\dot{\gamma}_1(t)) .$$
  Bewijs dat Γ een lokaal diffeomorfisme is in ieder punt van de t-as.
  (c) [15] Onderstel dat $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ voor alle t. Bewijs dat voor $r > 0$ het beeld van $[0, 2\pi] \times [-r, r]$ onder Γ bestaat uit alle $p \in \mathbb{R}^2$ die afstand $\leq r$ tot B hebben. (Hint: het kwadraat van de afstand van $p \in \mathbb{R}^2$ tot B is per definitie het infimum van de funktie $t \in \mathbb{R} \mapsto \|\gamma(t) - p\|^2$.)