ANALYSE IN MEER VARIABELEN IN BLOK 3, 17 APRIL 2012, 13:30-16:30

- Maak hooguit één som per blad en schrijf op ieder blad je naam en studentnummer.
- Wees helder en bondig.

De nummers tussen vierkante haakjes [ ] geven het waarderingspercentage aan. Kort na het tentamen is de uitwerking van de opgaven beschikbaar op de webpagina van het college.

(1) [Neem een nieuw blad; 30] Laat f de beperking zijn van de functie $5x^2 + 4y + 8z$ tot het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Bepaal de kritieke punten van f en de waarden van f in deze punten.

Oplossing. Is $p = (a, b, c)$ een kritiek punt van f, dan is volgens de Lagrange multiplicatorenmethode $\mathrm{grad}(5x^2+4y+8z)(p) = \lambda\,\mathrm{grad}(x^2+y^2+z^2-1)(p)$ voor een $\lambda \in \mathbb{R}$. Dus $10a = \lambda.2a$, $4 = \lambda.2b$ en $8 = \lambda.2c$. Dus $(5-\lambda)a = 0$ (d.w.z. $a = 0$ of $\lambda = 5$) en $b = 2\lambda^{-1}$ en $c = 4\lambda^{-1}$ (er geldt zeker $\lambda \neq 0$). Uit de laatste twee gelijkheden lezen we af dat $1 - a^2 = b^2 + c^2 = 4\lambda^{-2} + 16\lambda^{-2} = 20\lambda^{-2}$.

Als $a = 0$, dan is $1 = 20\lambda^{-2}$ en dus $\lambda = \pm 2\sqrt{5}$ en we vinden dan de kritieke punten $p = \pm(0, b, c) = \pm(0, \frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5})$ en $f(p) = 5a^2 + 4b + 8c = \pm 4\sqrt{5}$.

Als $\lambda = 5$, dan is $1 - a^2 = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ en dus is $p = (a, b, c) = (\pm\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ en $f(p) = 5a^2 + 4b + 8c = 5.\frac{1}{5} + (4.\frac{2}{5} + 8.\frac{4}{5}) = 1 + 8 = 9$.

(2) [Neem een nieuw blad; 35] Laat $f(x,y) = 2x^3 + 3x^2 - y^2$. Voor iedere $c \in \mathbb{R}$ beschouwen we de niveaufiguur $V_c = f^{-1}(c)$.

(a) [30] Bepaal de waarden van c waarvoor V_c *geen* 1-dimensionale C^1-deelvariëteit is van $\mathbb{R}^2$ en geef voor deze waarden van c ook de punten waar V_c in deze tekort schiet (toon in het bijzonder aan dat V_c daar inderdaad geen 1-dimensionale C^1-deelvariëteit is).

(b) [5] Is V_c daar überhaupt een deelvariëteit?

Oplossing. We bepalen eerst de kritieke punten van f. Is (a,b) een kritiek punt, dan is $6a^2 + 6a = 0$ en $b = 0$. Dus $(a,b) = (0,0)$ of $(a,b) = (-1,0)$ en f neemt daar de waarde 0 resp. 1 aan. In het bijzonder is V_c een C^∞-deelvariëteit van $\mathbb{R}^2$ als $c \neq 0, 1$. Datzelfde geldt voor $V_0 - \{(0,0)\}$ en $V_1 - \{(-1,0)\}$. We beschouwen nu het gedrag van V_0 in $(0,0)$ en het gedrag van V_1 in $(-1,0)$ nader.

De figuur V_0 is nabij $(0,0)$ gegeven door $y^2 = 2x^3 + 3x^2$ ofwel $y = \pm x\sqrt{2x+3}$. Die bestaat aldaar dus uit de vereniging van twee verschillende, elkaar snijdende grafieken door $(0,0)$ en derhalve is V_0 is te $(0,0)$ niet als een grafiek t.o.v. de x-variabele te schrijven. De afgeleide van $\pm x\sqrt{2x+3}$ te 0 is $\pm\sqrt{3} \neq 0$. Vanwege de impliciete functiestelling is te $(0,0)$ de grafiek $y = \pm x\sqrt{2x+3}$ ook te schrijven als de grafiek van een functie $x = g_\pm(y)$, met $g_\pm(y) = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}y +$ hogere orde. Dus V_0 is te $(0,0)$ evenmin te schrijven als een grafiek t.o.v. de y-variabele. We concluderen dat V_0 niet een deelvariëteit is te $(0,0)$.

Voor het punt $(-1,0)$ op V_1 is het handig om de coördinaat x te vervangen door $x-1$ zodat $(-1,0)$ overgaat in $(0,0)$ en V_1 overgaat in de verzameling V_1' gegeven door $y^2 = 2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - y^2 = 1$ ofwel door $y^2 = 2x^3 - 3x^2 = x^2(-3+2x)$. Nu geldt voor $0 < |x| < \frac{2}{3}$, $x^2(-3+2x) < 0$ en heeft $y^2 = 2x^3 - 3x^2$ derhalve geen oplossing. Voor $x = 0$, geldt $y = 0$, dus concluderen we dat de doorsnede van V_1' met de open strook in $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $|x| < \frac{2}{3}$ alleen uit $(0,0)$ bestaat. Ofwel: de doorsnede van V_1 met de open strook $-\frac{5}{3} < x < -\frac{1}{3}$ is $\{(-1,0)\}$. Dit is een C^∞-deelvariëteit van $\mathbb{R}^2$ van dimensie 0.

(3) [Neem een nieuw blad; 35] Zij $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ een C^2-immersie die periodiek is modulo 2π. Noem zijn beeld B.

(a) [10] Bewijs dat B begrensd is.

(b) [10] Beschouw de afbeelding $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$\Gamma(t,s) = (\gamma_1(t) - s\dot\gamma_2(t), \gamma_2(t) + s\dot\gamma_1(t)) .$$

Bewijs dat Γ een lokaal diffeomorfisme is in ieder punt van de t-as.

(c) [15] Onderstel dat $\|\dot\gamma(t)\| = 1$ voor alle t. Bewijs dat voor $r > 0$ het beeld van $[0, 2\pi] \times [-r, r]$ onder Γ bestaat uit alle $p \in \mathbb{R}^2$ die afstand $\leq r$ tot B hebben. (Hint: het kwadraat van de afstand van $p \in \mathbb{R}^2$ tot B is per definitie het infimum van de funktie $t \in \mathbb{R} \mapsto \|\gamma(t) - p\|^2$.)

Oplossing. (a) De continue functies γ_1 en γ_2 zijn begrensd op het interval $[0, 2\pi]$. Vanwege de periodiciteit zijn ze op heel $\mathbb{R}$ begrensd. Dus is B is begrensd.
(b) De Jacobimatrix van Γ te $(t, 0)$ is

$$\begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t) & -\dot\gamma_2(t) \\ \dot\gamma_2(t) & \dot\gamma_1(t) \end{pmatrix}$$

en die heeft determinant $\dot\gamma_1(t)^2 + \dot\gamma_2(t)^2$. Omdat γ een immersie is, is dit nergens nul. Vanwege de inverse fuctiestelling is Γ dan een lokaal diffeomorfisme te $(t, 0)$.
(c) Als $p \in \mathbb{R}^2$ te schrijven is als $\Gamma(t, s)$, dan is de afstand tussen p en $\gamma(t)$ gelijk aan r, dus p heeft afstand $\leq r$ tot B. Is omgekeerd de afstand van p tot B hoogstens r, beschouw dan de functie $g(t) := \|\gamma(t) - p\|^2$. Dit is een periodieke differentieerbare functie met periode 2π. Die heeft een minimum, zeg in $t \in [0, 2\pi)$, met dus $g(t) \leq r^2$. Dit is dan een kritiek punt van g en een kleine berekening leert dat dit betekent dat $\gamma(t) - p$ loodrecht staat op $\dot\gamma(t)$. Anders gezegd $\gamma(t) - p$ is een veelvoud van $(-\dot\gamma_2(t), \dot\gamma_1(t))$. De laatste is een eenheidsvector en dus is $\gamma(t) - p = \pm\sqrt{g(t)}(-\dot\gamma_2(t), \dot\gamma_1(t))$. M.a.w. $p = \Gamma(t, \pm\sqrt{g(t)})$ en derhalve ligt p in het Γ-beeld van $[0, 2\pi] \times [-r, r]$.