ANALYSE IN MEER VARIABELEN IN BLOK 3
EDUCATORIUM α, 26 APRIL 2012, 13:30-16:30

- Maak hooguit één som per blad en schrijf op ieder blad uw naam en studentnummer.
- Wees helder en bondig.

De nummers tussen vierkante haakjes [ ] geven het waarderingspercentage aan. Kort na het tentamen is de uitwerking van de opgaven beschikbaar op de webpagina van het college.

(1) [Neem een nieuw blad; 30] Bereken de inhoud van het deel D van $\mathbb{R}^3$ (met coordinaten (x, y, z)) gedefinieerd door $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $0 \leq z \leq x$.

(2) [Neem een nieuw blad; 35]

(a) [15] Leidt eerst af dat voor $a > 0$, e^{-ax^2} absoluut integreerbaar is over $\mathbb{R}$ met integraal $\sqrt{\pi/a}$ en bereken vervolgens voor $a > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}\, dx$.

(b) [20] Zij $A = (a_{ij})$ een reële, positief-definiete symmetrische $n \times n$-matrix. Bewijs dat

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i,j} a_{ij}x^i x^j}\, dx^1 \cdots dx^n = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

(Hint: gebruik dat A met behulp van een orthogonale transformatie A op diagonaalgedaante gebracht kan worden.)

(3) [Neem een nieuw blad; 35] Bereken de oppervlakte van het oppervlak V_s in $\mathbb{R}^3$ (met coordinaten (x, y, z)) gedefinieerd door $z = xy$, en $x^2 + y^2 < s^2$ als functie van het oppervlak van de schijf van straal s. Constateer dat deze functie C^∞ is in $s = 0$ en geef de Taylorontwikkeling daar tot op orde twee.

(Opmerking: de coëfficiënt van de tweede Taylorterm is een krommingsinvariant van V_s te $(0, 0, 0)$.)