UITWERKING TENTAMEN WISB 212: ANALYSE IN MEER VARIABELEN, 26 JUNI 2012

1.[30] Bereken de inhoud van het deel D van $\mathbb{R}^3$ (met coordinaten (x, y, z)) gedefinieerd door $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $0 \leq z \leq x$.

Oplossing. Voor $0 \leq t \leq 1$ zij D_t de doorsnede van D met het coordinaatvlak $x = t$. Dit wordt binnen $x = t$ gegeven door het blok $|y| \leq \sqrt{1-t^2}$, $0 \leq z \leq t$ en heeft dus een oppervlak gelijk aan $2\sqrt{1-t^2}\,t$. Derhalve geldt

$$\mathrm{vol}(D) = \int_0^1 2\sqrt{1-t^2}\,t dt = \int_0^1 \sqrt{1-s}\,ds = \big[-\tfrac{2}{3}(1-s)^{3/2}\big]_0^1 = \tfrac{2}{3}.$$

2a. [15] Leidt eerst af dat voor $a > 0$, e^{-ax^2} absoluut integreerbaar is over $\mathbb{R}$ met integraal $\sqrt{\pi/a}$ en bereken vervolgens voor $a > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx$.

2b. [20] Zij $A = (a_{ij})$ een reële, positief-definiete symmetrische $n \times n$-matrix. Bewijs dat

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i,j} a_{ij}x^i x^j}\,dx^1 \cdots dx^n = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

(Hint: gebruik dat A met behulp van een orthogonale transformatie A op diagonaalgedaante gebracht kan worden.)

Oplossing (a). Laat $B_s \subset \mathbb{R}^2$ gedefinieerd zijn door $x^2 + y^2 < s^2$. Dan is

$$\int_{B_s} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^s \int_0^{2\pi} e^{-r^2}\,rdrd\theta = 2\pi \int_0^s e^{-r^2}\,rdr = \pi \int_0^{s^2} e^{-t}dt = \pi(1-e^{-s^2}).$$

Is nu $A_s \subset \mathbb{R}^2$ het blok gedefinieerd door $|x| \leq s$, $|y| \leq s$, dan is $B_s \subset A_s \subset B_{s\sqrt{2}}$. Omdat $e^{-x^2-y^2}$ overal positief is, geldt dus

$$\pi(1-e^{-s^2}) \leq \int_{A_s} e^{-x^2-y^2} dxdy = \Big(\int_{-s}^{s} e^{-t^2}dt\Big)^2 \leq \pi(1-e^{-2s^2}).$$

We vinden zo dat $\Big(\int_{-s}^{s} e^{-t^2}dt\Big)^2$ voor $s \to \infty$ absoluut convergeert naar π. Dus $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt$ bestaat en is gelijk aan $\sqrt{\pi}$. Er volgt ook

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,\frac{dt}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Nu is $ax^2 + 2bx + c = a(x+\frac{b}{a})^2 - \frac{b^2-ac}{a}$, en dus is

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+b/a)^2+(b^2-ac)/a}\,dx = e^{(b^2-ac)/a}\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(b^2-ac)/a}.$$

(b) Er is een substitutie $x^j = \sum_{i=1}^n \sigma_i^j y^i$ met $\sigma = (\sigma_i^j)$ orthogonaal zo dat $\sum_{i,j} a_{ij}x^i x^j = \sum_{j=1}^n \lambda_j (y^j)^2$. Hier zijn de coëfficiënten λ_j de eigenwaarden van A en omdat A positief definiet is zal dus gelden $\lambda_j > 0$ voor alle j. Verder is $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ gelijk aan $\det(A)$. Omdat $\det(\sigma) = \pm 1$, is dan volgens de transformatieformule voor integralen (toegepast op het diffeomorfisme $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$):

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i,j} a_{ij}x^i x^j}\,dx^1 \cdots dx^n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_j \lambda_j (y^j)^2}\,dy^1 \cdots dy^n =$$

$$= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_j t^2}dt = \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_j}} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

3. [35] Bereken de oppervlakte van het oppervlak V_s in $\mathbb{R}^3$ (met coordinaten (x, y, z)) gedefinieerd door $z = xy$, en $x^2 + y^2 < s^2$ als functie van het oppervlak van de schijf van straal s. Constateer dat deze functie C^∞ is in $s = 0$ en geef de Taylorontwikkeling daar tot op orde twee.

Oplossing. Als we $B_s \subset \mathbb{R}^2$ definiëren door $x^2 + y^2 < s^2$, dan is V_s de grafiek van $g : B_s \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = xy$. Als nu $h : B_s \to V_s$, $h(x, y) = (x, y, xy)$, dan is

$$\operatorname{opp}(V_s) = \int_{B_s} h^* d\operatorname{opp}_{V_s} = \int_{B_s} \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2} dxdy = \int_{B_s} \sqrt{1 + y^2 + x^2} dxdy =$$

$$= \int_0^s \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + r^2}\, r dr d\theta = 2\pi \int_0^s \sqrt{1 + r^2}\, r dr = \pi \int_0^{s^2} (1 + t)^{1/2}\, dt =$$

$$= \pi \Big[\frac{2}{3}(1 + t)^{3/2}\Big]_0^{s^2} = \frac{2\pi}{3}((1 + s^2)^{3/2} - 1) = \frac{2\pi}{3}\Big(\big(1 + \pi^{-1}\operatorname{opp}(B_s)\big)^{3/2} - 1\Big).$$

Deze functie in C^∞ in $\operatorname{opp}(B_s)$ en omdat

$$(1 + t)^{3/2} = (1 + t)(1 + t)^{1/2} = (1 + t)(1 + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{8}t^2 + \cdots) = 1 + \tfrac{3}{2}t + \tfrac{3}{8}t^2 + \cdots$$

zien we dat te $s = 0$,

$$\operatorname{opp}(V_s) = \frac{2\pi}{3}\big(\tfrac{3}{2\pi}\operatorname{opp}(B_s) + \tfrac{3}{8\pi^2}\operatorname{opp}(B_s)^2 + \cdots\big) = \operatorname{opp}(B_s) + \tfrac{1}{4\pi}\operatorname{opp}(B_s)^2 + \cdots.$$