MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE WISB212 WERD IN 2002/2003 GEGEVEN DOOR DR. J.A.C. KOLK.

Analyse in Meer Variabelen (WISB212)
29 april 2003

Opgave 1

Zoals bekend geldt $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$

a. Bewijs met behulp hiervan en van bolcoördinaten in $\mathbb{R}^n$ de gelijkheid

$$\text{hyperarea}_{n-1}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

b. Gebruik onderdeel (i) om aan te tonen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,dx = \frac{1}{2}\text{hyperarea}_n(S^n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Hint: Substitueer eerst bolcoördinaten en vervolgens $r = \tan\beta$, en gebruik tenslotte de bekende identiteit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\beta\,\sin^{q-1}\beta\,d\beta = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{p}{2})\,\Gamma(\frac{q}{2})}{\Gamma(\frac{p+q}{2})} \qquad (p,\,q \in \mathbb{N}).$$

Opgave 2

Zij $U = \{\,x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1,\, x_3^2 + x_4^2 < 1\,\}$. Bewijs

$$\int_U x_1^2\,x_4^2\,dx = \frac{\pi^2}{16}.$$

Hint: Zij $V = \mathbb{R}_+^2 \times \,]-\pi,\pi[\,^2 \subset \mathbb{R}^4$ en beschouw de substitutie van variabelen $\Psi : V \to \mathbb{R}^4$ gegeven door

$$\Psi(r,s,\alpha,\beta) = (r\cos\alpha,\, r\sin\alpha,\, s\cos\beta,\, s\sin\beta).$$

Opgave 3

Beschouw

$$\phi : \left]\,0, \frac{\pi}{2}\,\right[\to \mathbb{R}^2 \qquad \text{gegeven door} \qquad \phi(s) = \begin{pmatrix} \sin s \\ \cos s + \log\tan\frac{1}{2}s \end{pmatrix}.$$

a. Bewijs dat $\phi'(s) = \cos s \begin{pmatrix} 1 \\ \cot s \end{pmatrix}$ en dat ϕ een C^1 inbedding is. Concludeer dat $T := \text{im}(\phi)$ een C^1 deelvariëteit in $\mathbb{R}^2$ van dimensie 1 is en bewijs dat T onbegrensd is.

Beschouw T als deelverzameling van het (x_1, x_3)-vlak in $\mathbb{R}^3$ en zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het omwentelingsoppervlak dat ontstaat door wenteling van T in $\mathbb{R}^3$ om de x_3-as. Dan is V een C^1 deelvariëteit in $\mathbb{R}^n$ van dimensie 2; dit mag zonder bewijs worden gebruikt.

b. Bewijs met hulp van onderdeel (i) dat de oppervlakte van de onbegrensde variëteit V gelijk is aan 2π.

Opgave 4

We herinneren aan de eerste identiteit van Green, voor passende Ω en f en g, terwijl $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ de afgeleide van f in de richting van de uitwendige normaal ν is,

$$(\star) \qquad \int_\Omega (g\, \Delta f)(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \Big(g\, \frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)(y)\, d_{n-1}y - \int_\Omega \langle\, \mathrm{grad} g,\, \mathrm{grad} f\, \rangle(x)\, dx.$$

Onderstel dat f harmonisch is op Ω, d.w.z. $\Delta f = 0$.

a. Bewijs middels $(\star)$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu}(y)\, d_{n-1}y = 0.$$

Zij nu in het bijzonder $\Omega = B^n(r)$, de open bol in $\mathbb{R}^n$ met middelpunt 0 en straal $r > 0$, en definieer $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ door $g(x) = \|x\|^2$.

b. Toon aan dat $\frac{\partial g}{\partial \nu}(y) = 2r$, voor alle $y \in S^{n-1}(r) = \partial B^n(r)$. Leid nu uit de tweede identiteit van Green af

$$n \int_{B^n(r)} f(x)\, dx = r \int_{S^{n-1}(r)} f(y)\, d_{n-1}y.$$

Concludeer $n\ \mathrm{vol}_n(B^n) = \mathrm{hyperarea}_{n-1}(S^n - 1)$.

N.B. De volgende vraag stond niet in het oorspronkelijke tentamen, maar stond wel in de code die wij kregen.

Opgave 5

[**Steiner's hypocycloïde**] Zij $b > 0$; en definieer $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ en Steiner's hypocycloïde $H \subset \mathbb{R}^2$ door, respectivelijk,

$$\phi(\alpha) = b\begin{pmatrix} 2\cos\alpha + \cos 2\alpha \\ 2\sin\alpha - \sin 2\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad H = \mathrm{im}(\phi).$$

a. Bewijs dat de lengte van H gelijk is aan $16b$, d.w.z., 16 keer de straal van de ingeschreven cirkel van H.

b. Bewijs dat de oppervlakte van de begrensde verzameling in $\mathbb{R}^2$ begrensd door H gelijk is aan $2\pi b^2$, d.w.z., twee keer de oppervlakte van de ingeschreven cirkel van H.