Docent: J. van de Leur

Assistent: J.L. van der Leer Duran

ANALYSE IN MEER VARIABELEN

JUNI 26 2013, 13:30-16:30

Exercise 1 ***(25 pt)*** Laat T de torus in $\mathbb{R}^3$ zijn die gegeven wordt door de parametrisatie

$$\Phi(\alpha, \theta) = ((2 + \cos\theta)\cos\alpha, (2 + \cos\theta)\sin\alpha, \sin\theta), \qquad -\pi < \alpha, \theta \leq \pi.$$

(a) ***(10 pt)*** Bereken $\mathrm{vol}_2(T)$ en toon aan dat T ook 2-dimensionaal Jordan meetbaar is.

Met de standaard Euclidische dichtheid geldt

$$\mathrm{vol}_2(T) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\det D\Phi^t D\Phi}\, d\alpha d\theta.$$

Er geldt

$$D\Phi = \begin{pmatrix} -(2+\cos(\theta))\sin(\alpha) & -\sin(\theta)\cos(\alpha) \\ (2+\cos(\theta))\cos(\alpha) & -\sin(\theta)\sin(\alpha) \\ 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dus

$$D\Phi^t D\Phi = \begin{pmatrix} (2+\cos(\theta))^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Het volume is dus

$$\mathrm{vol}_2(T) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (2+\cos(\theta))\, d\alpha d\theta = 8\pi^2 < \infty,$$

dus T is Jordan meetbaar.

(b) ***(5 pt)*** Laat C de kromme zijn op de torus T die we krijgen door voor een vaste waarde $p \in \mathbb{R}$ het beeld te nemen van

$$\gamma(t) = ((2 + \cos(pt))\cos t, (2 + \cos(pt))\sin t, \sin(pt)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Bewijs dat C een gesloten kromme is op T dan en slechts dan als $p \in \mathbb{Q}$ (*Hint*: Bekijk de periodiciteit van γ).

We bewijzen eerst dat als γ zichzelf kruist dan $p \in \mathbb{Q}$. Stel $\gamma(t) = \gamma(s)$. Dan geldt $\sin(pt) = \sin(ps)$ en $\cos(pt) = \cos(ps)$ (kwadrateer de eerste twee componenten en tel ze op). Dus $t = s + \frac{2\pi k}{p}$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$. Anderzijds geldt ook $\cos(t) = \cos(s)$ en $\sin(t) = \sin(s)$, dus $t = s + 2\pi l$ voor een $l \in \mathbb{Z}$. Dus $p = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$. Dus C gesloten impliceert $p \in \mathbb{Q}$. Andersom, als $p = \frac{k}{l}$ met k en l copriem, zien we uit bovenstaande redenering dat γ periodiek is met periode $2\pi l$, dus dan is C gesloten.

(c) ***(10 pt)*** Stel een zo eenvoudig mogelijke integraal op waarmee je de lengte van C kunt berekenen (je hoeft deze integraal niet op te lossen) en bewijs dat C 1-dimensionaal Jordan meetbaar is dan en slechts dan als $p \in \mathbb{Q}$.

$$D\gamma(t) = \begin{pmatrix} -(2+\cos(pt))\sin(t) - p\sin(pt)\cos(t) \\ (2+\cos(pt))\cos(t) - p\sin(pt)\sin(t) \\ p\cos(pt) \end{pmatrix},$$
$$\sqrt{D\gamma^t D\gamma} = \sqrt{p^2 + (2+\cos(pt))^2}.$$

De lengte van C is dus

$$l(C) = \int_0^{2\pi l} \sqrt{p^2 + (2+\cos(pt))^2}dt < \infty \quad \text{als } p = \frac{k}{l}, \gcd(k,l) = 1$$
$$l(C) = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{p^2 + (2+\cos(pt))^2}dt = \infty \quad \text{als } p \notin \mathbb{Q}.$$

Voor de laatste gelijkheid merk op dat de integrand altijd van onder begrensd is door $\sqrt{p^2+1}$. Dus C is Jordan meetbaar dan en slechts dan als $p \in \mathbb{Q}$.

Exercise 2 ***(25 pt)*** Laat Ω de volle ellipsoïde in $\mathbb{R}^3$ zijn die gegeven wordt door

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} < 1 \right\}.$$

(a) ***(10 pt)*** Bereken $\mathrm{vol}_3(\Omega)$.

$$\mathrm{vol}_3(\Omega) = \int_\Omega d_3x.$$

Beschouw het diffeomorfisme $\Psi : B(0,1) \to \Omega$, met $B(0,1)$ de bol in $(0,0,0)$ met straal 1 gegeven door

$$(y_1, y_2, y_3) \mapsto (ax_1, bx_2, cx_3).$$

De Jacobiaan is gelijk aan abc, en de Stelling van variabelensubstitutie geeft ons

$$\mathrm{vol}_3(\Omega) = abc\,\mathrm{vol}_3(B(0,1)) = \frac{4\pi abc}{3}.$$

(b) ***(5 pt)*** Bereken de uitwendige eenheidsnormaalvector $\nu(x_1, x_2, x_3)$ in het punt $x = (x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega$.

De normaal wordt gegeven door $\frac{\nabla(f)}{||\nabla(f)||}$ met $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1$. Dus,

$$\nu(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4} + \frac{x_3^2}{c^4}}} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{a^2} \\ \frac{x_2}{b^2} \\ \frac{x_3}{c^2} \end{pmatrix}.$$

(c) ***(10 pt)*** In het vorige deeltentamen moest je de afstand berekenen van de oorsprong tot het raakvlak in $x = (x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega$. Het antwoord was:

$$\mathrm{d}(0, T_x\partial\Omega) = \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4} + \frac{x_3^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Bereken

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}(0, T_x\partial\Omega)\, d_2x.$$

Hint: Doe dit niet rechtstreeks, maar gebruik bijvoorbeeld de divergentie-stelling van Gauss. Kies dan zelf een eenvoudig vectorveld zodat dit mooi uitkomt.

Beschouw op Ω het vectorveld

$$X(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Op $\partial\Omega$ geldt

$$\langle X, \nu \rangle = \mathrm{d},$$

omdat $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ op $\partial\Omega$. Volgens Gauss' divergentiestelling geldt

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\ d_2x = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle \cdot d_2x = \int_{\Omega} \mathrm{div}(X) d_3x = 3\int_{\Omega} d_3x = 3\ \mathrm{vol}_3(\Omega) = 4\pi abc.$$

Exercise 3 (*30 pt*)

(a) **(*10 pt*)** Laat $f(x) = (x_1, x_2, -2x_3)$ het vectorveld in $\mathbb{R}^3$ zijn en S_- en S_+ de twee halve-bolschillen

$$S_\pm = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \ \pm x_3 \geq 0\}.$$

$\nu_\pm$ is de eenheidsnormaalvector op $S_\pm$ die naar boven gericht is. Bereken de twee integralen

$$\int_{S_\pm} \langle f, \nu_\pm \rangle d_2 x$$

en laat zien dat het antwoord gelijk is.

$\nu_\pm = \pm x$, dus $\langle f, \nu_\pm \rangle = \pm(1 - 3x_3^2)$ op $S_\pm$. Gebruiken we de bolcoordinaten $(x, y, z) = r(\cos\alpha\cos\theta, \sin\alpha\cos\theta, \sin\theta)$, dan zien we dat

$$\int_{S_+} \langle f, \nu_+ \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - 3\sin^2(\theta)) \cos\theta d\theta d\varphi = 2\pi(\sin\theta - \sin^3\theta)_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

en

$$\int_{S_-} \langle f, \nu_- \rangle = -\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - 3\sin^2\theta) \cos\theta d\theta d\varphi = -2\pi(\sin\theta - \sin^3\theta)_{\frac{-\pi}{2}}^{0} = 0$$

(b) **(*10 pt*) We willen dit nu generaliseren.** Laat $H_\pm$ twee hyperoppervlakken in $\mathbb{R}^n$ zijn die geparametriseerd worden door

$$\Phi_\pm(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \phi_\pm(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})), \quad y_1^2 + y_2^2 + \cdots y_{n-1}^2 \leq 1.$$

$\phi_\pm$ beide C^2, neem aan dat

$$\phi_-(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \leq \phi_+(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$$

en dat

$$H_+ \cap H_- = \partial H_+ = \partial H_-.$$

$\nu_\pm$ is de eenheidsnormaal op $H_\pm$ die zo gekozen is dat de n^{e}-component $(\nu_\pm)_n > 0$ is. Laat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een C^2-vectorveld zijn met $\operatorname{div} f = 0$.

Bewijs dat

$$\int_{H_-} \langle f, \nu_- \rangle(y) d_{n-1} y = \int_{H_+} \langle f, \nu_+ \rangle(y) d_{n-1} y.$$

Zij U het gebied in $\mathbb{R}^n$ begrensd door H_+ en H_-. Gauss' divergentiestelling impliceert

$$0 = \int_U \mathrm{div}(f) = \int_{H_+} \langle f, \nu_+ \rangle - \int_{H_-} \langle f, \nu_- \rangle.$$

Het relatieve minteken verschijnt omdat op H_- de normaalvector naar buiten gegeven wordt door $-\nu_-$.

(c) ***(10 pt)*** Laat ook $\partial H_\pm$ in een hypervlak door de oorsprong liggen, dus

$$\partial H_\pm \subset V_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = 0\} \quad \text{en ook } H_+ \cap V_a = H_- \cap V_a = \partial H_+ = \partial H_-.$$

Merk op dat $a_n \neq 0$ anders zijn H_- en H_+ geen hyperoppervlakken. Neem nu tevens aan dat

$$\langle f(x), a \rangle = 0 \quad \text{voor alle } x \in V_a.$$

Toon aan dat

$$\int_{H_-} \langle f, \nu_- \rangle(y) d_{n-1}y = \int_{H_+} \langle f, \nu_+ \rangle(y) d_{n-1}y = 0.$$

Zij W de regio in het hypervlak V_a dat begrensd wordt door $\partial H_+ = \partial H_-$, en $U_\pm$ het open gebied begrensd door $H_\pm$ en W. De normaalvectors op V_a zijn gegeven door $\frac{\pm a}{||a||}$, en $f|_W$ staat hier loodrecht op per aanname. Weer gebruik makend van de divergentiestelling zien we dat

$$0 = \int_{U_+} \mathrm{div}(f) = \int_{H_+} \langle f, \nu_+ \rangle + \int_W \langle f, \frac{\pm a}{||a||} \rangle = \int_{H_+} \langle f, \nu_+ \rangle$$

en eenzelfde berekening voor H_-, waaruit het gevraagde volgt.