Arnold Zillener 2016

Problem 1:

We will first proof that T is differentiable.
We have to find a Linear map L such that:

$$\lim_{x \to a} \frac{\|T(x) - T(a) - L(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

chose $L = T$ becaus T is a linear map then

$$\lim_{x \to a} \frac{\|T(x) - T(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} = \lim_{x \to a} \frac{\|T(x) - T(a) - T(x) + T(a)\|}{\|x-a\|} = \lim_{x \to a} \frac{0}{\|x-a\|}$$

$= 0$ $\quad (T(x-a) = T(x) - T(a)$ while T is linear).

So T is differentiable with $DT(a) = T$.

Now we can use the chain rule to calculate $D(T \circ f)(x_0)$ (note that $T \circ f$ is indeed differentiable while it is a composition of differentiable functions.

$$D(T \circ f)(x_0) = DT(f(x_0)) \circ Df(x_0) = T \circ Df(x_0).$$

Problem 2:

Definieer $F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2^4 - y_1 \\ x_1^3 + x_2 + y_1 - y_2 \end{pmatrix}$

We bekijken $D_x F(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 4x_2^3 \\ 3x_1^2 & 1 \end{pmatrix}$

en $\det(D_x F(x,y)) = 2 - 12x_1^2 x_2^3 \neq 0$ voor $(0,1)$

dus we zien dat deze functie voldoet aan de implicite functiestelling. Die zegt nu dat er ~~X ∈ ℝ bestaan zodat~~
U, V open bestaan zodat $\forall y \in V \ \exists! \, x \in U$ zodat $F(x,y) = 0$
dus. ~~Aangezien U open is ...~~

Verder geeft deze stelling een smooth map $\psi : V \to U$ met $\psi(y) = x$, want F is smooth. Aangezien V open is, is er een $r > 0$ zodat $B_r^2((0,1)) \subset V$ en een $R > 0$ zodat $\psi(B_r^2((0,1))) = B_R^2((0)) \subset U$.

(ii) Uit de implicite functie stelling volgt ook:

$$D\psi((0,1)) = -D_x F(\psi(y),(0,1))^{-1} \circ D_y F(\psi(0,1),(0,1))$$

We berekenen eer $\psi(0,1)$ dan moet gelden

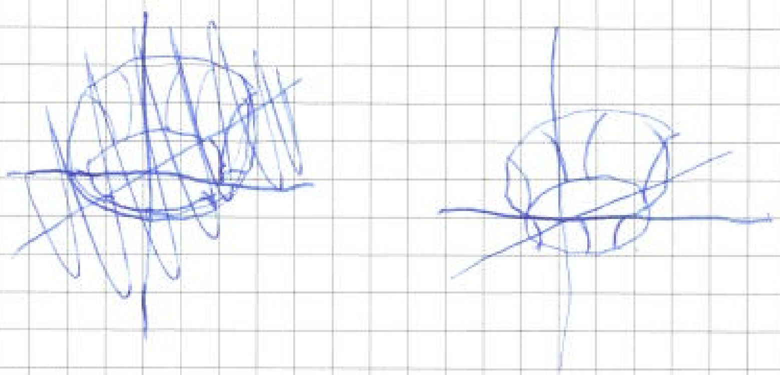
$2x_1 + x_2^4 = 0$ dan volgt $x_1, x_2 = 0$

$x_1^3 + x_2 + 0 = 0$. Dan volgt

$$D\psi((0,1)) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problem 3

(i)



(ii) We merken op dat dit gebied door drie delen wordt ingesloten. Twee hiervan zijn schijven deze zijn duidelijk Jordan verwaarloosbaar want het zijn 2 dim ~~deel~~ ~~3 dim~~ omringende deel vierkanten in een 3 dim ruimte. Het derde kan worden geschreven als een graph $(x_1, x_2, e^{(x_1^2+x_2^2)})$

dus $f(x) = e^{x_1^2+x_2^2}$. Daarmee is die ook Jordan verwaarloosbaar. Omdat S wordt ingesloten door Jordan verwaarloosbare verzamelingen is S Jordan meetbaar.

(iii) We willen gebruik maken van cilinder coordinaten dus gebruiken we de Substitutie stelling. Hiervoor hebben we een diffeomorphisme nodig. Definieer

$$\phi(r, \varphi, h) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)$$

$$\phi: (0, e) \times (0, 2\pi) \times (0, 1) \to V$$

met V de open cilinder met straal e en hoogte 1

Nu merken we op ϕ is injectief op dit domein en $\mathrm{Det}(D\phi) = r \neq 0$ dus regular. Dus volgt uit de inverse functiestelling dat ϕ hierop een diffeomorphisme is.

Bekijk nu $\int_S 1_S \, dx = \int_{S-\delta S} 1_S \, dx$ met δS de rand van S dit kan want δS is Jordan verwaarloosbaar. Merk op dat $S - \delta S \subset V$. Dus kunnen we de substitutiestelling gebruiken (want de functie is begrensd).

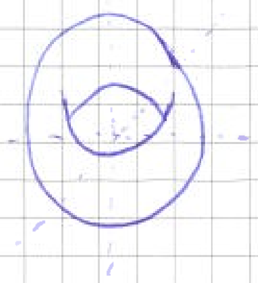
$$\int_{S-\delta S} 1_S \, dx = \int_{(0,e^h)\times(0,2\pi)\times(0,1)} 1_S \, r \, d\phi$$

We integreren open open blokken en over een compact begrensde functie. Dus kunnen we Fubini gebruiken. Dan volgt:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{e^h} 1_S \, r \, dr \, d\phi \, dh = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} e^h \, d\phi \, dh = \pi(e-1)$$

Problem 4:

(i)



met de punten:
$(3,0,0)$, $(2,0,1)$,
$(2,\sqrt{5},0)$ en $(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$

(ii) We gebruiken 4.7.1 iii met $g(x)=\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-2\right)^2+x_3^2-1$
We moeten dus laten zien dat $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ een submersie is. Bekijk dus

$$Dg(x)=\begin{pmatrix} 2x_1 - \frac{4x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ 2x_2 - \frac{4x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

merk op dat dit nooit de 0 vector wordt op de torus: We bekijken eerst $x_3\neq 0$ dan is $Dg(x)$ duidelijk niet de 0 vector. Stel $x=0$ dan volgt $\sqrt{x_1^2+x_2^2}=3$ of $\sqrt{x_1^2+x_2^2}=1$. Dan wordt het eerste component van de vorm $2x_1-\frac{4x_1}{3}$ of $2x_1-\frac{4x_1}{1}$ deze zijn ongelijk aan 0 behalve als $x_1=0$ dan volgt $x_2\neq 0$ en het tweede component ziet er als volgt uit $2x_2-\frac{4x_2}{3}$ of $2x_2-\frac{4x_2}{1}$ dus deze is dan ongelijk aan 0.

We zien nu dat $g(x)$ een submersie is en dus dat Π een deelvariëteit is. Merk op $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dus de dimensie van Π is 2. Merk ook nog op dat g smooth is dus Π is smooth.

(iii) We gebruiken 5.1.2 daaruit volgt

$T_x\Pi = \operatorname{Ker}(D_g(x))$, we merken op dat de raakruimte 2-dimensionaal is aangezien Π twee dimensionaal is. We zoeken dus 2 lineair onafhankelijke vectoren met

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2x_1 - \frac{4x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ 2x_2 - \frac{4x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ 2x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Kies $V' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $W' = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ -2x_3 \\ 2x_1 - \frac{4x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + 2x_2 - \frac{4x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{pmatrix}$

Dan is $T_x\Pi$ de ruimte opgespannen door V', W'!

Problem 5

(i) We gebruiken hiervoor V' en W' uit problem 4 en berekenen $V = V' \times W'$

$$V = \begin{pmatrix} +x_1\left(2x_1 - \frac{4x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + 2x_2 - \frac{4x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) \\ -x_2\left(2x_1 - \frac{4x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + 2x_2 - \frac{4x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) \\ 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \end{pmatrix}$$

(ii) $$V(2,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(iii) $$\int_\Sigma X \cdot V \, dA = \int_{C_1} Y(x)\, dC_1 + \int_{C_3} Y(x)\, dC_2$$

Hier maken we gebruik van de stelling van Stokes en zijn C_1, C_3 de randen in dit geval cirkels om de oorsprong met straal 1 en 3. C_1 parameteriseren we als volgt $C_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ met t loopt van 0 tot 2π. C_3 als volgt $C_3(t) = (3\cos(t), 3\sin(t), 0)$

met t loopt ook van 0 tot 2π. Dan vinden we het volgende integraal.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin(-t) \\ \cos(-t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(-t) \\ -\cos(-t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \; +$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -\sin(-t)^2 - \cos(-t)^2 \, dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9\sin^2(t) + 9\cos^2(t)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -1 \, dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9 \, dt = 8\pi$$

Problem 6:

(i) ~~Note~~ Merk op dat S het teruggehaalde beeld is van een punt en daarmee gesloten. Verder merken we op dat $S \subset [-2,2] \times [-2,2]$, want voor elke $|x|, |y| \geq 2$ is $x^4 - x$ of $y^4 - y$ groter dan 0 dus niet bevat in S. Dus S is begrensd en gesloten oftewel compact. We weten uit inleiding analyse dat een continue begrensde functie hierop een maximum bereikt.

(ii) Merk op dat $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en dat het maximum zich dus op de rand moet bevinden. Hiervoor kijken we naar het inproduct van de afgeleide met ~~de~~ ~~raaklijn~~ T_xS. Merk op dat S een 1-dimensionale deelvarieteit is volgens de submersie definitie. Dan weten we dat

$T_xS = \ker(Dg_{(x,y)})$ met $g(x,y) = x^4 - x + y^4 - y$

$$T_xS = \ker\begin{pmatrix} 4x^3-1 \\ 4y^3-1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -4y^3+1 \\ 4x^3-1 \end{pmatrix}.$$

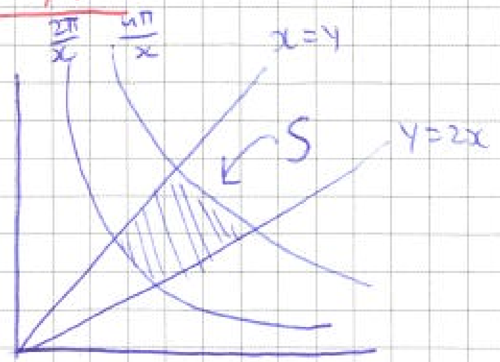
We bekijken nu dus $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4y^3+1 \\ 4x^3-1 \end{pmatrix}\mathbb{R} = 0$

oftewel $4x^3 - 1 - 4y^3 + 1 = 0$ dan volgt $x = y$

~~uit de orgin~~ Dit vullen we in in de orginele definitie van S dan zien we $2x^4 - 2x = 0$ daaruit volgt $x = 0$ of $x = 1$ dus de punten $(0,0)$ en $(1,1)$ merk op dat $(1,1)$ hiervan het maximum is.

Problem 7:

(i)



(ii) We notice that S is compact and its boundaries are lines so jordan negligable in $\mathbb{R}^2$ this means that S is jordan measurable. And the function f is bounded on S. Dus het integraal bestaat. Om het uit te rekenen willen we de substitutie stelling gebruiken met als functie $\phi(c,d) \longrightarrow \left(\sqrt{\frac{d}{c}}, \sqrt{cd}\right)$

$$\phi: [1,2] \times [2\pi, 4\pi] \longrightarrow S - \delta S$$

met δS de rand van S. Merk op dat ϕ injectief is op $(1,2) \times (2\pi, 4\pi)$. We bekijken nu

$$\det(D\phi) = \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{d}}{c\sqrt{c}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d}{c}} \\ \sqrt{\frac{1}{c}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{d}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{d}} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4c} - \frac{1}{4c} = -\frac{1}{2c}$$

deze is nooit 0 dus ϕ is regular. Dus ϕ is een diffeomorphisme door de inverse functie stelling.

Met deze voorbereiding gaan we nu het integraal berekenen:

$$\int_S f(x,y)\,ds = \int_{\partial S - \delta S} f(x,y)\,ds$$

, want de rand is Jordan verwaarloosbaar

$$\int_{S-\delta S} f(x,y)\,ds = \int_{(1,2)\times(2\pi,4\pi)} f(c,d)\,\cancel{d\phi} \cdot -\frac{1}{2c}\,d\phi$$

Omdat we integreren over een product van open intervallen mogen we gebruik maken van Fubini, want $-f(c,d)\cdot\frac{1}{2c}$ is continu en begrensd op dit gebied:

$$\int_{2\pi}^{4\pi}\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{\frac{d}{c}}} \sin\left(\sqrt{cd}\sqrt{\frac{d}{c}}\right) dc\,dd = \int_{2\pi}^{4\pi}\int_{1}^{2} c \sin d \; dc\,dd$$

$$= 0$$

Problem 8:

We will Solve this in two parts. We will show a Smooth diffeomorphism from the cube to $\mathbb{R}^n$ and from $\mathbb{R}^n$ to the sphere. ~~Bew~~ Consider the function $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ by $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$. This function is smooth a diffeomorphism (the function is injetive on it's domain and $f'(x)\neq 0$ on the domain so by the inverse function theorem it is a diffeomorphism).

Now define $\Psi_1(x_1,\dots,x_n)=(f(x_1),\dots,f(x_n))$ $\Psi_1:(-1,1)^n\to\mathbb{R}^n$. This is now obviously also a smooth diffeomorphism. Define now

$$\Psi_2:\mathbb{R}^n\to B_1^n(0) \qquad \Psi_2(y)=\frac{y}{\sqrt{1+\|y\|^2}}$$

This function is also smooth and a diffeomorphism.

Now we see that $\Psi_2\circ\Psi_1$ is a diffeomorphism from the cube to the ball.