Onderwerp:

Datum:

$g(u) = 0$

$T_x \Pi = \ker(Dg(u))$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 - 4\sqrt{x_1^2+x_2^2}\, x_1 \\ 2x_2 - 4\sqrt{x_1^2+x_2^2}\, x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ 2x_2 - 4\sqrt{x_1^2+x_2^2}\, x_2 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_3 \cdots \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2^4 - y_1 \\ x_1^3 + x_2 + 1 - y_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4x_2^3 \\ 3x_1^2 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 12x_1^2 x_2^3$$

Onderwerp:

Datum:

Ziltener 2016

Problem 1:

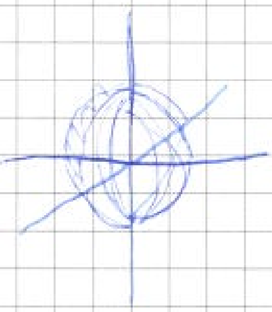
a two by one vector and a 2×2 matrix. $DF = \partial_i f_j$ $\quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m$

n is aantal variabelen en m de hoeveel coordinaten die eruit komen. Daarmee:

$$DF = (x_2, x_1) \qquad D(DF) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

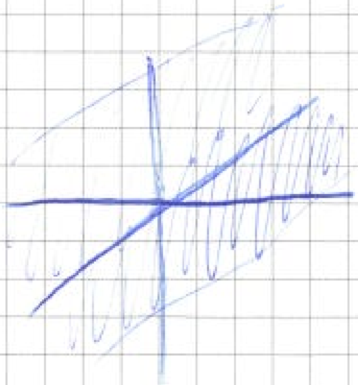
Problem 2:

(1) $\{1\} \times \mathbb{R}^2$



Bol met straal 1

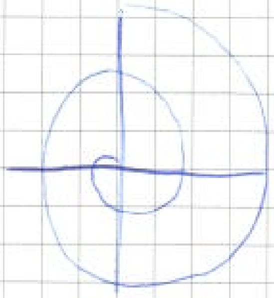
$\mathbb{R} \times \{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}$



Het yz vlak

Problem 3:

(i)



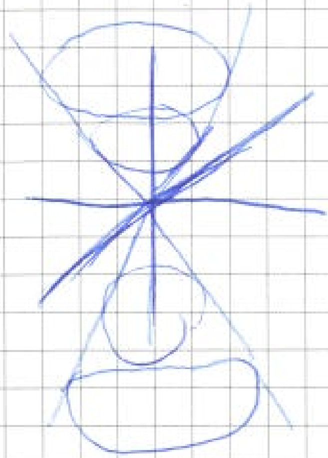
(ii) We use 4.7.1 (ii) ~~aanhaketens~~ en delienaren deze varieteit aan de hand van het beeld van een imbedding namelijk $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\phi(y) \longrightarrow e^y(\cos y, \sin y)$
Hieruit volgt dat de dimensie 1 is. Het rest ons te checken dat ϕ een inbedding is. We bekijken eerst de immersieteitseis:

$$D\phi(y) = \begin{pmatrix} e^y \cos y - e^y \sin y \\ e^y \sin y + e^y \cos y \end{pmatrix}$$

Deze is duidelijk injectief ~~want~~ want nooit $\sin y = \cos y = 0$ $\forall y$

Verder is ϕ duidelijk injectief ~~op zijn beeld~~ dus bijectief op zijn beeld. Ook zie we doordat ϕ een rechte continue functie is, zijn inverse ook continu is. Dus ϕ is een homeomorfisme en daarmee in inbedding en M dus een submanifold.

$\mathbb{R}^2 \times \{\frac{\pi}{4}\}$



dubbele cone door de oorsprong

(ii) We gaan hier gebruik maken van de inverse functie stelling. We bekijken eerst of de functie regular is. Bekend is dat $\mathrm{Det}(DF) = r^2 \sin\theta$. Aangezien $r \neq 0$ en $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ zien we dat deze nooit 0 is dus f is regulier. Merk op dat f alleen punten op hetzelfde punt afbeeldt als $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$. Kies nu $\delta = \frac{\min(r, \frac{\pi}{2} - |\theta|)}{2}$.

We zien dat op dit gebied $V_x = [r-\delta, r+\delta] \times [\varphi-\delta, \varphi+\delta] \times [\theta-\delta, \theta+\delta]$ f dus injectief is en regulier, want $V_x \subset \mathbb{R}^3$ voor alle $x \in \mathbb{R}^3$. Hieruit volgt dat f een diffeomorphisme. NB een smooth diffeomorphisme want f is smooth.

(iii) We gebruiken Theorem 5.1.2 dan volgt: met $x = \phi(y)$

$$T_x M = \begin{pmatrix} e^y \cos y - e^y \sin y \\ e^y \cos y + e^y \sin y \end{pmatrix} = \operatorname{im}(D\phi)$$

(iv) $x = \phi(y) = (1,0)$ we zien dat dan volgt $y = 0$ dus

$$T_{\phi(0)=(1,0)} M = \begin{pmatrix} e^0 \cos 0 - e^0 \sin 0 \\ e^0 \cos 0 + e^0 \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problem 4:

We first note that the area over which we integrate is compact. We call this area S. Now we note that integrating over S or $S - \delta S$ is the same while δS is Jordan negligible. On this area $\sin(\frac{2\pi y}{x})$ is bounded. Now we see

$$\int_0^1 \int_y^1 \sin\left(\frac{2\pi y}{x}\right) dx\,dy = \int_S \sin\left(\frac{2\pi y}{x}\right) dS = \int_0^1 \int_0^x \sin\left(\frac{2\pi y}{x}\right) dy\,dx$$

~~Fubini~~

We use Fubini to change the integration order. We can do this while we integrate over a compact set.

$$\int_0^1 \int_0^x \sin\left(\frac{2\pi y}{x}\right) dy\,dx = \int_0^1 \left[-\frac{x}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi y}{x}\right) \right]_0^x dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

Problem 5

(i) We note that $[0,1) \times [0,\varphi_0]$ is Jordan measurable while it is a product of ~~rectangles~~ intervals. Further we note that $\phi(r,\varphi) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ is a diffeomorphism while ($\phi : [0,1) \times [0,\varphi_0] \to S - \delta S$) $\mathrm{Det}(D\phi) = r \neq 0$ and ϕ is injective on the given domain so by the inverse function theorem ϕ is a diffeomorphism. Now we see that $S - \delta S$ is Jordan measurable and while δS is Jordan negligible ~~measurable~~ we see that S is Jordan measurable (It is a submanifold of a lower dimension).

Now we also note that $e^{\|x\|^2}$ is continuous and bounded on S so $\int_S f(x)dx$ exist.

(ii) Because we know ϕ is a diffeomorphism we can the inverse change of variables theorem. And because we will then intergrate over intervals on a bounded function we can use Fubini:

$$\int_S e^{\|x\|^2} dx = \int_0^{\varphi_0}\int_0^{1} r e^{r^2} \, dr \, d\varphi = \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} \, d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right)\varphi_0$$

Problem 6:

(i) Merk op C is het terug gehaald beeld van een punt dus gesloten. Verder zien we dat $C \subset [-2,2] \times [-2,2]$. Stel $x, y > 2 > 0$ dan zien we dat $x^6 - x > 0$ ~~en voor~~ grotere en $y^6 - y$ ook > 0 dus $x < -2$, $y > 2$ dan $x^6 - x > 0$ en $y^6 - y > 0$. Stel $x > 2$, $y < -2$ dan en als laatste $x, y < -2$ dan . Dus C is ook begrensd. Dus C is compact.

(ii) We gebruiken 4.7.1 iii de submersie definitie van een submanifold. Dan moeten we alleen checken dat $g(u) = x^6 - x + y^6 - y$ submersie is. We bekijken dus:

~~Dg~~ $Dg(u) = \begin{pmatrix} 6x^5 - 1 \\ 6y^5 - 1 \end{pmatrix}$

We merken dat deze alleen 0 is voor $a = \left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}, \sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right)$ maar $a \notin C$ dus $g(u)$ is submersie. Daarmee is C een deel variëteit. Verder is $g(u) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dus de dimensie d: $2 - d = 1$ dus $d = 1$.

(iii) Uit §.1.2 volgt dat

$$T_x C = \operatorname{Ker}(Dg(x)) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 6x^5 - 1 \\ 6y^5 - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6y^5 + 1 \\ 6x^5 - 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R}.$$

We merken op dat dit de het tangent space opspant want die heeft dezelfde dimensie als C dus 1.

(iv) We gebruiken de stelling van green

$$\int_C X \cdot T \, ds = \int_{opp\,C} \operatorname{curl}(X)\, dc = \int_{opp\,C} 0 \, dc = 0$$

want
$$\operatorname{curl}(X) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ e^{x^2} & \cos(y^2) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Problem 7.

(i) We note that $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T$ wit C the Cramer matrix. This is determinant with the use of determinants. So al the pieces from this function are smooth so the function is smooth.

Problem 8:

Kies als functie

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^{-3} + 2 & x > y \\ -y^{-3} & x \leq y \end{cases}$$

Deze functie is netjes integreerbaar over het gebied en als we de integralen gaan uitrekenen zien we:

$$\int_0^1 \int_0^y -y^{-3}\, dx + \int_y^1 2x^{-3} + 2\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{y^2} + -1 + \frac{1}{y^2} + 2 - 2y\, dy$$

$$= \int_0^1 -1 + 2 - 2y\, dy = 0$$

De ander volgorde:

$$\int_a^1 \int_0^x 2x^{-3} + 2\, dy + \int_x^1 -y^{-3}\, dy\, dx$$

$$= \int_a^1 \frac{2}{x^2} + 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}\, dx = \int_a^1 \frac{3}{2x^2} + 2x + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2a} - a^2 - \frac{1}{2}a$$

$$= \frac{3}{2a} - a^2 - \frac{1}{2}a$$ Als $a \to 0$ gaat dit duidelijk naar ∞

Merk op dat aan de eerste eis ook wordt voldaan. Kies een $b \in (0,1)$ dan voor $x=b$ geldt het integraal:

$$\int_0^b \frac{2}{b^3}+2 \, dy + \int_b^1 -\frac{1}{y^3} \, dy = \frac{2}{b^2}+2b+\frac{1}{2}-\frac{1}{2b^2}$$

Voor $y=b$ geldt:

$$\int_0^b -\frac{1}{b^3} \, dx + \int_b^1 \frac{2}{x^3}+2 \, dx = -\frac{1}{b^2}-1+\frac{1}{b^2}+2-2b.$$

Die zijn allemaal netjes want $b \neq 0$.