Dit tentamen is in elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat. A–Eskwadraat kan niet aansprakelijk worden gesteld voor de gevolgen van eventuele fouten in dit tentamen.

EERSTE DEELTENTAMEN WISB 212

Analyse in Meer Variabelen

20–04–2005 9–12 uur

- *Zet uw naam en collegekaartnummer op elk blad, en op het eerste blad de naam van uw practicumleider (Alex Boer of Richard Cushman) alsmede het totaal aantal ingeleverde bladzijden.*
- *De verschillende onderdelen van het vraagstuk zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, mag u de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen. Raak dus niet ontmoedigd indien het u niet lukt een bepaald onderdeel te maken en ga gewoon door.*
- *Bij dit tentamen mogen syllabi, aantekeningen en/of rekenmachine* **NIET** *worden gebruikt.*

1

Exercise 0.1 (De meetkunde van de vierkantsvergelijking). In dit vraagstuk beschouwen we de polynoomfunctie $p(x, y) = x^2 + 2y_1 x + y_2$ in de reële variabele x met reële coëfficiënten $2y_1$ en y_2 als een functie $p : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ van alle drie de variabelen gelijktijdig, dus

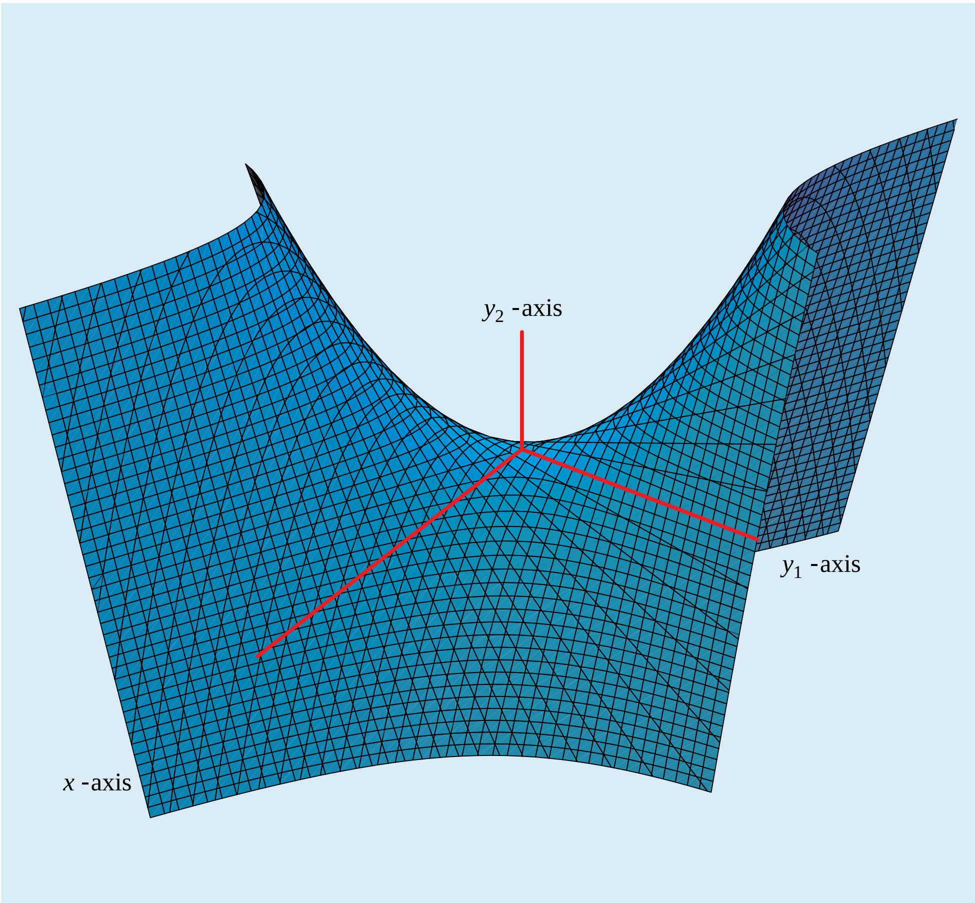
$$p : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} \qquad \text{gegeven door} \qquad p(x, y) = x^2 + 2y_1 x + y_2.$$

Men kan allerlei eigenschappen van de vierkantsvergelijking aflezen uit meetkundige eigenschappen van de nulpuntsverzameling

$$N = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \mid p(x, y) = 0 \},$$

en omgekeerd. Met behulp van het *Mathematica* package `ContourPlot3D` is de onderstaande illustratie van het gladde oppervlak N in $\mathbf{R}^3$ gemaakt; zo een oppervlak wordt een *hyperbolische paraboloïde* of ook wel een *zadelvlak* genoemd.

2



Figuur 1: Hyperbolische paraboloïde

Op zijn beurt roept deze illustratie onmiddellijk nieuwe vragen op: over N zien we onder andere berg-parabolen lopen in vlakken die loodrecht staan op de y_1-as. We zullen dit nu nader onderzoeken. We beginnen met een overzicht van welbekende algebraïsche aspecten.

(i) Bewijs

$$p(x,y) = (x+y_1)^2 - \Delta(y) \qquad \text{waarbij} \qquad \Delta(y) = y_1^2 - y_2;$$

uiteraard is $\Delta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de *discriminant* van de kwadratische vergelijking. Veronderstel nu dat $(x,y) \in \mathbf{R}^3$ voldoen aan $p(x,y) = 0$. Concludeer dat dan

$$(\star) \qquad \Delta(y) = (x+y_1)^2 \geq 0;$$

dat er maximaal twee verschillende oplossingen x van $p(x,y) = 0$ bestaan; en ook dat x een oplossing met multipliciteit 2 van $p(x,y) = 0$ is dan en slechts dan als

$$(x, y_1) \in S := \{\, (x, y_1) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y_1 = 0 \,\}.$$

(ii) Toon aan dat $N = \mathrm{im}(\phi)$ waarbij

$$\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \qquad \text{is gedefinieerd door} \qquad \phi(x, y_1) = (x, y_1, -x^2 - 2y_1 x).$$

Concludeer dat N een C^∞ deelvariëteit in $\mathbf{R}^3$ van dimensie 2 is.

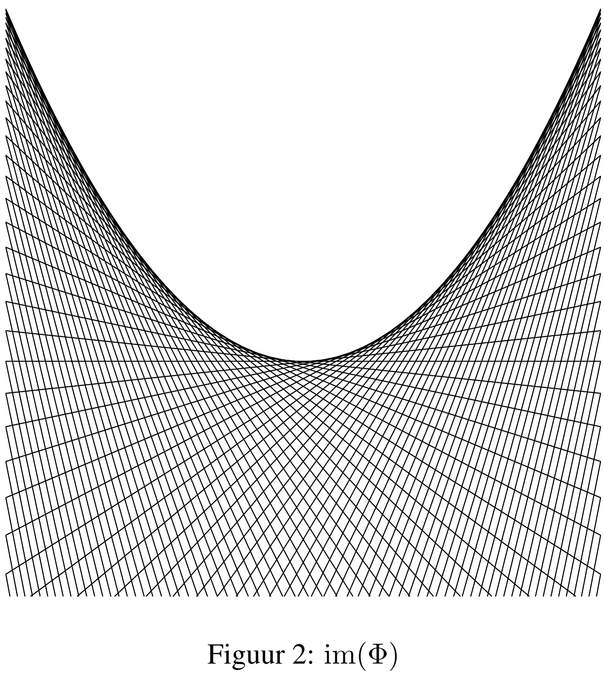
(iii) Bereken de rang van $Dp(x,y) \in \mathrm{Lin}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ voor alle $(x,y) \in \mathbf{R}^3$. Bewijs nu nog eens, op een andere manier dan in onderdeel (ii), dat N een C^∞ deelvariëteit in $\mathbf{R}^3$ van dimensie 2 is.

Zij $\pi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ de orthogonale projectie $\pi(x,y) = y$ en definieer

$$\Phi = \pi \circ \phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2; \qquad \text{dus} \qquad \Phi(x, y_1) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -x^2 - 2y_1 x \end{pmatrix}.$$

(iv) Bereken $D\Phi(x, y_1) \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^2)$ alsmede $\det D\Phi(x, y_1)$. Ga na dat de verzameling van singuliere punten van Φ gelijk is aan de rechte lijn S uit onderdeel (i). Verifieer dat de rang van $D\Phi(x, y_1)$ gelijk is aan 1, voor alle $(x, y_1) \in S$.

De beeldverzameling van Φ zien we in de onderstaande Figuur 2. Uiteraard wordt deze verkregen door projectie van het (ruimtelijk) oppervlak uit Figuur 1 op het achtervlak.



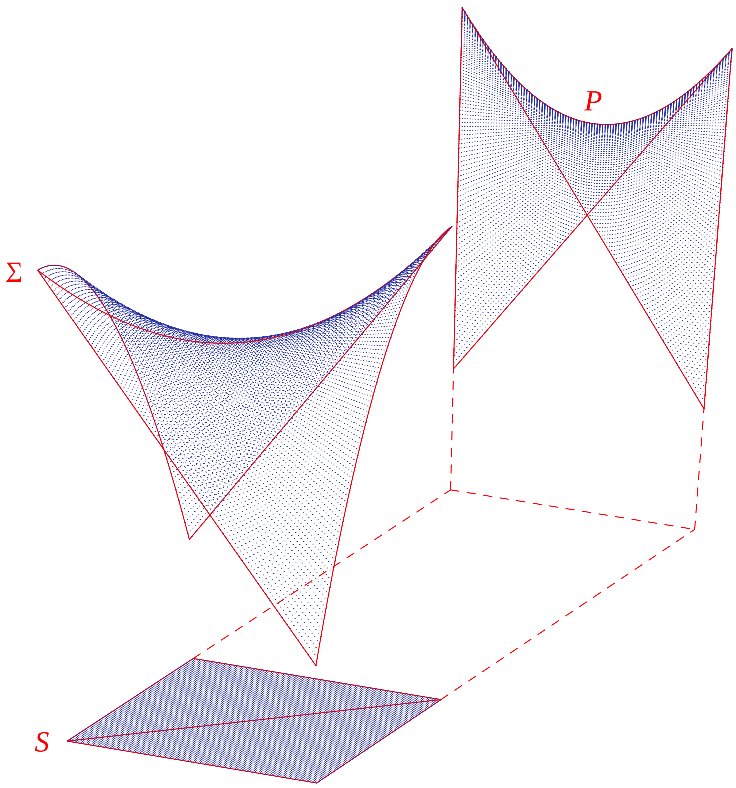
Figuur 2: $\mathrm{im}(\Phi)$

(v) Bewijs dat het beeld $\Phi(S) \subset \mathbf{R}^2$ gelijk is aan de dalparabool (onder gebruik van de notatie uit onderdeel (i))
$$P = \{\, y \in \mathbf{R}^2 \mid \Delta(y) = 0 \,\}.$$
Verifieer verder
$$\Phi(\mathbf{R}^2 \setminus S) = \{\, y \in \mathbf{R}^2 \mid \Delta(y) > 0 \,\},$$
d.w.z., dit beeld bestaat uit de open deelverzameling van $\mathbf{R}^2$ liggende onder de parabool P. Toon ook aan m.b.v. onderdeel (i) dat $\Phi^{-1}(\{y\}) \subset \mathbf{R}^2$ steeds uit twee elementen bestaat indien $y \in \Phi(\mathbf{R}^2 \setminus S)$. Vertaal deze resultaten in een uitspraak over de doorsnijding van N met rechte lijnen parallel aan de x-as.

(vi) Laat zien dat uit onderdeel (v) volgt dat $\phi(S) = \pi^{-1}(P)$, en dat deze verzameling verder gelijk is aan de ruimtekromme in N
$$\Sigma = \mathrm{im}(\sigma) \qquad \text{met} \qquad \sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3 \qquad \text{gegeven door} \qquad \sigma(x) = (x, -x, x^2).$$
In de onderstaande Figuur 3 zien we de kromme Σ. Toon ook aan
$$\Sigma = \{\, (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \mid p(x, y) = D_1 p(x, y) = 0 \,\}.$$

(vii) Ga na dat de doorsnijding van N met een vlak $\{\, (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \mid y_1 \text{ is constant} \,\}$ (dus loodrecht staande op de y_1-as) een bergparabool is met haar top in het punt $\sigma(-y_1)$.

(viii) Geef een parametrisering van de geometrische raaklijn $\Lambda(x)$ aan de kromme Σ in het punt $\sigma(x)$, voor elke $x \in \mathbf{R}$.



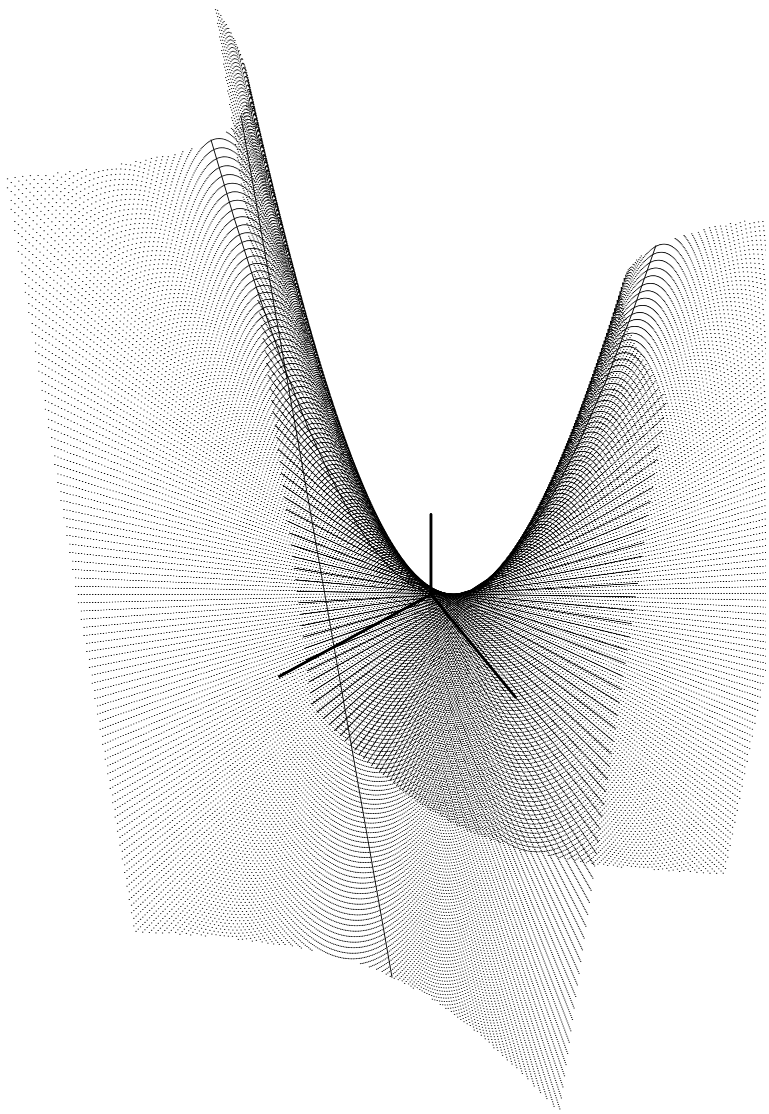
Figuur 3: De rechte lijn S, de vlakke kromme Σ en de parabool P

Het onderstaande onderdeel (ix) behoort niet tot het formele tentamen, maar levert wel bonuspunten op.

In de Figuren 1 en 4 zien we ook rechte lijnen over het oppervlak N lopen in vlakken die loodrecht lijken te staan op de x-as. We tonen nu het bestaan van deze lijnen aan. Zij hiertoe $x \in \mathbf{R}$ vastgekozen en definieer $N(x)$ als de orthogonale projectie van $\Lambda(x)$ op het platte vlak $\{\, (x, y) \in \mathbf{R}^3 \mid y \in \mathbf{R}^2 \,\}$ (dat dus gaat door $\sigma(x)$ en loodrecht staat op de x-as).

(ix) Verifieer dat $N(x)$ de rechte lijn $\sigma(x) + \mathbf{R}(0, -1, 2x)$ is, en verder dat het oppervlak N de vereniging is van de disjuncte lijnen $N(x)$, voor alle $x \in \mathbf{R}$. Laat zien dat elke lijn $N(x)$ de kromme Σ in precies één punt snijdt.

Achtergrond: Bij gegeven $x \in \mathbf{R}$, parametriseert de lijn $N(x)$ alle kwadratische vergelijkingen met voorgeschreven nulpunt x terwijl $\sigma(x)$ de unieke kwadratische vergelijking geeft met nulpunt x met multipliciteit twee.



Figuur 4