TWEEDE DEELTENTAMEN WISB 212

Analyse in Meer Variabelen

30-06-2004 14–17 uur

- *Zet uw naam en collegekaartnummer op elk blad, alsmede het totaal aantal ingeleverde bladzijden.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, mag u de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen.*
- *Bij dit tentamen mogen syllabi en/of rekenmachine* **NIET** *worden gebruikt.*

Exercise 0.1 (Catenoïde). We definiëren $\cosh s = \frac{1}{2}(e^s + e^{-s})$ en verder

$$\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \qquad \text{door} \qquad \phi(s,t) = (\cosh s \cos t,\ \cosh s \sin t,\ s),$$

en we beschouwen het oppervlak $C = \mathrm{im}(\phi)$, waarvan zonder bewijs mag worden gebruikt dat het een C^∞ deelvariëteit in $\mathbf{R}^3$ van dimensie 2 is. (Zeepvliezen tussen twee concentrische parallelle cirkels hebben dikwijls de vorm van een deel van dit oppervlak.) Zij $a \in \mathbf{R}_+$ willekeurig gekozen.

Voor gebruik in dit vraagstuk herinneren we aan de formules

$$\sinh s = \frac{1}{2}(e^s - e^{-s}), \quad \cosh^2 s - \sinh^2 s = 1, \quad \cosh^2 s + \sinh^2 s = \cosh 2s, \quad 2\cosh s \sinh s = \sinh 2s.$$

(i) Bewijs dat de lengte van de spiraalvormige kromme $K_a = \{\, \phi(s,s) \mid |s| \le a \,\}$ op C gelijk is aan $2\sqrt{2}\sinh a$.

Definieer $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ door $f(a) = \pi(a + \cosh a \sinh a)$.

(ii) Bewijs dat de oppervlakte van de deelverzameling C_a van C bestaande uit de $x \in C$ met $|x_3| < a$ gelijk is aan $2 f(a)$.

Voor $a \in \mathbf{R}_+$ definiëren we $\Omega_a \subset \mathbf{R}^3$ als de begrensde open deelverzameling begrensd door C_a en de twee schijven

$$D_a^{\pm} = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \le \cosh^2 a,\ x_3 = \pm a \,\}.$$

(iii) Bewijs dat $\mathrm{vol}_3(\Omega_a) = f(a)$ met behulp van 3-dimensionale integratie.

(iv) Pas de Divergentiestelling van Gauss toe met Ω_a en het vectorveld $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gegeven door $f(x) = (x_1, x_2, 0)$, en verklaar zodoende de relatie tussen de resultaten uit de onderdelen (ii) en (iii).

Exercise 0.2 (Golfoperator). We definiëren de open sector U in $\mathbf{R}^2$ en de differentiaaloperator $\Box$ op $\mathbf{R}^2$, respectievelijk, door

$$U = \{\, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \mid |x_2| < x_1 \,\}, \qquad \Box = D_1^2 - D_2^2,$$

en zij verder $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ een willekeurige C^∞ functie met compacte drager. Op twee verschillende manieren zullen we de volgende identiteit bewijzen:

$$(\star) \qquad \int_U \Box\, \phi(x)\, dx = 2\phi(0).$$

Definieer voor de eerste manier $\Psi \in \mathrm{Mat}(2, \mathbf{R})$ door $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Bewijs dat $\Psi \in \mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$ en toon aan dat Ψ de rotatie in $\mathbf{R}^2$ om de oorsprong over de hoek $-\frac{\pi}{4}$ is. Leid hieruit af dat $\Psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ een C^∞ diffeomorfisme is met de eigenschap $U = \Psi(V)$ indien $V = \mathbf{R}^2_+$. Toon aan dat $D\Psi(y) = \Psi$ en bereken det $D\Psi(y)$, voor alle $y \in \mathbf{R}^2$.

(ii) Schrijf $\phi \circ \Psi = \widetilde{\phi} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ en bewijs middels de kettingregel de volgende identiteit van afbeeldingen van $\mathbf{R}^2$ naar $\mathrm{Lin}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^2)$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{D_1\phi} \\ \widetilde{D_2\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1\phi \\ D_2\phi \end{pmatrix} \circ \Psi = \Psi \begin{pmatrix} D_1\widetilde{\phi} \\ D_2\widetilde{\phi} \end{pmatrix}; \qquad \text{en concludeer}$$

$$\widetilde{D_i\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big((-1)^{i-1}D_1 + D_2\big)\widetilde{\phi} \qquad (1 \le i \le 2).$$

Pas nu de laatstgenoemde identiteit toe met ϕ vervangen door $D_i\phi$, met $1 \le i \le 2$ respectievelijk, en bewijs

$$(\Box\, \phi) \circ \Psi = 2D_1D_2\widetilde{\phi}.$$

Welke stelling is nodig bij het bewijs van de laatste identiteit?

(iii) Toon nu aan m.b.v. de onderdelen (i) en (ii) alsmede de Hoofdstelling van de Integraalrekening dat de identiteit in $(\star)$ geldt.

In de nu volgende onderdelen (v) tot en met (vii) geven we een tweede, onafhankelijk, bewijs van $(\star)$ middels de Integraalstelling van Green. Beschouw hiertoe het vectorveld

$$f = S\,\mathrm{grad}\,\phi = \begin{pmatrix} D_2\phi \\ D_1\phi \end{pmatrix} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \qquad \text{met} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbf{R}).$$

(iv) Bewijs de identiteit curl $f = \Box\, \phi$ van functies op $\mathbf{R}^2$.

(v) Verifieer dat een positieve parametrisering $y : \mathbf{R} \to \partial U$ wordt gegeven door

$$y(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}(s)\, s \\ -s \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbf{R}),$$

waarbij sgn de tekenfunctie is. Toon vervolgens aan

$$Dy(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}(s) \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad SDy(s) = -\,\mathrm{sgn}(s)Dy(s) \qquad (s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}),$$

en concludeer met de kettingregel

$$-\,\mathrm{sgn}(s)\frac{d(\phi \circ y)}{ds}(s) = \langle f \circ y, Dy\rangle(s) \qquad (s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}).$$

(vi) Gebruik de compactheid van de drager van ϕ om aan te tonen dat de identiteit uit de Integraalstelling van Green geldig is voor de onbegrensde open verzameling U en het vectorveld f, en concludeer met behulp van deze identiteit alsmede de onderdelen (v) en (vi) dat $(\star)$ volgt.

Solution of Exercise 0.1

(i) For $s \in \mathbf{R}$ and $\psi(s) := \phi(s, s) = (\cosh s \cos s, \cosh s \sin s, s)$, we have

$$D\psi(s) = (\sinh s \cos s - \cosh s \sin s, \sinh s \sin s + \cosh s \cos s, 1),$$
$$\|D\psi(s)\|^2 = \sinh^2 s + \cosh^2 s + 1 = \sinh^2 s + \cosh^2 s + \cosh^2 s - \sinh^2 s = 2\cosh^2 s.$$

Therefore the desired length is given by

$$\sqrt{2}\int_{-a}^{a} \cosh s \, ds = 2\sqrt{2}[\sinh s]_0^a = 2\sqrt{2}\sinh a.$$

(ii) We have the following equalities of vectors, evaluated at the point $(s, t) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \begin{pmatrix} \sinh s \cos t \\ \sinh s \sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\cosh s \sin t \\ \cosh s \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\cosh s \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -\sinh s \end{pmatrix},$$

$$\text{hence} \qquad \left\| \frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\| (s, t) = \cosh s \sqrt{1 + \sinh^2 s} = \cosh^2 s.$$

Now

$$2\int_0^a \cosh^2 s \, ds = \int_0^a (1 + \cosh 2s) \, ds = [s + \frac{1}{2}\sinh 2s]_0^a = a + \cosh a \sinh a.$$

Note that ϕ is not an embedding with image equal to C_a, but that we can make it so, up to a negligible set, by restricting ϕ to the subset $]-a, a[\times]-\pi, \pi[$ of $\mathbf{R}^2$. This gives

$$\text{area}(C_a) = 2\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^a \left\| \frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\| (s, t) \, ds \, dt = 4\pi \int_0^a \cosh^2 s \, ds = 2f(a).$$

(iii) Introduce cylindrical coordinates $x = \Psi(r, t, s) = (r \cos t, r \sin t, s)$ in $\mathbf{R}^3$; then it is a well-known computation that $|\det D\Psi(r, t, s)| = r$. Applying the Change of Variables Theorem and the computation of the definite integral of $\cosh^2$ from part (ii) we get

$$\text{vol}_3(\Omega_a) \; = 2\int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\cosh s} r \, dr \, dt \, ds = 2\pi \int_0^a \cosh^2 s \, ds = f(a).$$

(iv) Gauss' Divergence Theorem asserts

$$\int_{\Omega_a} \text{div}\, f(x) \, dx = \int_{C_a} \langle f, \nu \rangle(y) \, d_2 y + \sum_{\pm} \int_{D_a^{\pm}} \langle f, \nu \rangle(y) \, d_2 y.$$

Now $\text{div}\, f = 2$. Furthermore, for $y \in C_a$, we obtain from the computation of the exterior product and its norm in part (ii), inserting a minus sign because we need the outer normal,

$$\langle f, \nu \rangle(y) = \left\langle \begin{pmatrix} \cosh s \cos t \\ \cosh s \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\cosh s} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -\sinh s \end{pmatrix} \right\rangle = 1.$$

And finally $\nu(y) = \pm e_3$ implies $\langle f, \nu \rangle(y) = 0$, for all $y \in D_a^{\pm}$. As a consequence we obtain on the strength of part (ii)

$$2\,\text{vol}_3(\Omega_a) = \text{area}(C_a) = 2f(a).$$

Solution of Exercise 0.2

(i) We have

$$\Psi^t\Psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = I \qquad \text{and} \qquad \det\Psi = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Accordingly $\Psi \in \mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$ and therefore it is of the form $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, that is, $\cos\alpha = -\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, hence $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. In particular, $\Psi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{R}^2)$, which implies that $\Psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ is a C^∞ diffeomorphism. $D\Psi(y) = \Psi$ follows from $\Psi \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^2)$, and so $\det D\Psi(y) = 1$, for all $y \in \mathbf{R}^2$.

(ii) The chain rule, transposition and the orthogonality of Ψ, successively, imply

$$D(\phi\circ\Psi) = (D\phi)\circ\Psi\, D\Psi, \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{grad}\widetilde{\phi} = (D\Psi)^t(\operatorname{grad}\phi)\circ\Psi,$$

$$\Longrightarrow \qquad \widetilde{\operatorname{grad}\phi} = (\operatorname{grad}\phi)\circ\Psi = \big((D\Psi)^t\big)^{-1}\operatorname{grad}\widetilde{\phi} = \Psi\operatorname{grad}\widetilde{\phi}.$$

As a consequence we obtain, for $1 \le i \le 2$,

$$\widetilde{D_i^2\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}((-1)^{i-1}D_1 + D_2)\widetilde{D_i\phi} = \frac{1}{2}((-1)^{i-1}D_1 + D_2)^2\widetilde{\phi},$$

$$\Longrightarrow \quad (\Box\,\phi)\circ\Psi = \frac{1}{2}((D_1+D_2)^2 - (-D_1+D_2)^2)\widetilde{\phi} = 2D_1D_2\widetilde{\phi},$$

where we used Theorem 2.7.2 on the equality of mixed partial derivatives.

(iii) In fact, the Change of Variables Theorem 6.6.1 and Theorem 6.4.5 imply

$$\int_U \Box\,\phi(x)\,dx = \int_{\Psi(V)} \Box\,\phi(x)\,dx = \int_V (\Box\,\phi)\circ\Psi(y)|\det D\Psi(y)|\,dy$$

$$= 2\int_{\mathbf{R}_+}\int_{\mathbf{R}_+} D_1(D_2\widetilde{\phi})(y_1, y_2)\,dy_1\,dy_2 = -2\int_{\mathbf{R}_+} D_2\widetilde{\phi}(0, y_2)\,dy_2$$

$$= 2\widetilde{\phi}(0) = 2\phi\big((\Psi(0)\big) = 2\phi(0).$$

(iv) In the notation of Formula (8.21) and Lemma 8.3.10.(iii) we have

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J^{\overline{\ \ }}.$$

Since $J \in \mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$

$$\operatorname{curl} f = \operatorname{div}(J^t f) = \operatorname{div}(J^t J\,\overline{\operatorname{grad}\phi}) = \operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad}\phi}) = (D_1^2 - D_2^2)\phi = \Box\,\phi.$$

(v) Differentiation gives the formula for $Dy(s)$ upon noticing that sgn is a locally constant function. $\nu(y(s)) = -\begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{sgn}(s) \end{pmatrix}$, and accordingly

$$\det(\nu \circ y \mid Dy)(s) = \begin{vmatrix} -1 & \operatorname{sgn}(s) \\ -\operatorname{sgn}(s) & -1 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

Therefore $y : \mathbf{R} \to \partial U$ is a positive parametrization. We have

$$SDy(s) = \begin{pmatrix} -1 \\ \operatorname{sgn}(s) \end{pmatrix} = -\operatorname{sgn}(s)\begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(s) \\ -1 \end{pmatrix} = -\operatorname{sgn}(s)Dy(s).$$

We now obtain by means of the chain rule and $S^t = S$, for $s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{d(\phi \circ y)}{ds}(s) &= D\phi(y(s))Dy(s) = -\operatorname{sgn}(s)\langle \operatorname{grad} \phi(y(s)),\ SDy(s)\,\rangle \\ &= -\operatorname{sgn}(s)\langle\, (S \operatorname{grad} \phi) \circ y(s),\ Dy(s)\,\rangle = -\operatorname{sgn}(s)\langle\, f \circ y,\ Dy\,\rangle(s). \end{aligned}$$

(vi) On the basis of Green's Integral Theorem 8.3.5 and the compact support of ϕ we find

$$\begin{aligned} \int_U \square\,\phi(x)\,dx &= \int_U \operatorname{curl} f(x)\,dx = \int_{\partial U} \langle\, f(y), d_1 y\,\rangle = \int_{\mathbf{R}} \langle\, f \circ y, Dy\,\rangle(s)\,ds \\ &= -\operatorname{sgn}(s)\int_{\mathbf{R}} \frac{d(\phi \circ y)}{ds}(s)\,ds = \int_{-\infty}^{0} \frac{d(\phi \circ y)}{ds}(s)\,ds \\ &\quad - \int_0^{\infty} \frac{d(\phi \circ y)}{ds}(s)\,ds = \phi(y(0)) - (-\phi(y(0))) = 2\phi(0). \end{aligned}$$