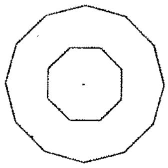
Deeltentamen *Groepentheorie* (WISB221). A. Henriques, Nov 2011.

Geef niet alleen anwoorden, maar bewijs al je beweringen. Wees extra gedetailleerd als er "met uitleg" staat.

Opgave 1 Wat is de definitie van de signatuur van een permutatie? [2pt] [1pt]
Wat is de signatuur van de permutatie $g := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots\cdots & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in S_n$? (met uitleg) [1pt]

Opgave 2 Bereken de orde van de groep van symmetrieën van de volgende figuur (een 8-hoek in een 12-hoek): [4pt] [1pt]



Is deze groep cyklisch? (met uitleg) [1pt]
Is deze groep abels? (met uitleg) [1pt]
Is deze groep een deelgroep van SO_2? (met uitleg) [1pt]

Opgave 3 Zij $n \in \mathbb{N}$ een natuurlijk getal. Hoeveel elementen van orde n zijn er in O_2? [3pt] [1pt]
Laat zien dat de groep O_2 voortgebracht is door elementen van orde 2. [1pt]
Welke van de volgende groepen zijn abels: U_1, U_2, SU_2, SU_3, O_1, O_2, SO_2, SO_3? [1pt]

Opgave 4 Zij $g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de volgende permutaties $g := (1,2)$, $h(x) := x + 1$. [4pt]
Voor $n \geq 1$, bereken $h^n g h^{-n}$. [1pt]
Wat is de orde van gh^ngh^{-n}? [hint: het hangt van n af] [2pt]
Zij $G := \langle g, h^2 \rangle$ de groep die door g en h^2 is voorgebracht. Is de actie van G op $\mathbb{Z}$ transitief? (met uitleg) [1pt]

Opgave 5 Zij G een groep en $k \in G$ een element. Laat zien dat de afbeelding [4pt]

$$\begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto kgk^{-1} \end{aligned}$$

altijd en automorfisme is. [1pt]
Zij $g := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ en $h := \left(\begin{smallmatrix} cos(2\pi/n) & -sin(2\pi/n) \\ sin(2\pi/n) & cos(2\pi/n) \end{smallmatrix}\right)$ de twee voortbrengers van de dihedrale groep D_n.
Wat is de orde van het element gh? [1pt]
Laat zien dat $gh = kgk^{-1}$ voor een goed gekozen element $k \in SO_2$. [1pt]
Definiëert $g \mapsto gh$, $h \mapsto h$ een automorfisme van D_n? (met uitleg) [1pt]

Opgave 6 Bekijk de actie [3pt]

$$\alpha : S_n \to S_{n+2}$$

van de symmetrische groep S_n op de verzameling $X := \{1, 2, 3, \ldots, n+2\}$ die de transpositie $(i,j) \in S_n$ naar $(i,j)(n+1, n+2) \in S_{n+2}$ stuurt. In andere woorden $\alpha((i,j)) := (i,j)(n+1, n+2)$.
Is deze actie transitief? Wat zijn de banen van deze actie? [1pt]
Is deze actie vrij? [1pt]
Wat zijn de vaste punten (="fixpunten") in X van het element $(1, 2, 3, \ldots, n) \in S_n$? [1pt]