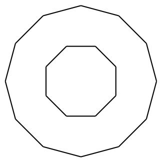
Deeltentamen *Groepentheorie* (WISB221). A. Henriques, Nov 2011.

Geef niet alleen anwoorden, maar bewijs al je beweringen.

Opgave 1 Wat is de definitie van de signatuur van een permutatie? **[2pt]** [1pt]
Wat is de signatuur van de permutatie $g := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots\cdots & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in S_n$? [1pt]

Oplossing: Als π en product van n transposities is, dan is $\mathrm{sign}(\pi) = (-1)^n$. Het element $g = \underbrace{(1,2)(2,3)(3,4)\dots(n-1,n)}_{n-1} \cdot \underbrace{(1,2)(2,3)(3,4)\dots(n-2,n-1)}_{n-2} \cdots \underbrace{(1,2)(2,3)}_{2} \cdot \underbrace{(1,2)}_{1}$ is en product van $\binom{n}{2}$ transposities, dus $\mathrm{sign}(g) = (-1)^{\binom{n}{2}}$.

Opgave 2 Bereken de orde van de groep van symmetrieën van de volgende figuur (een 8-hoek in een 12-hoek): **[4pt]** [1pt]



Is deze groep cyklisch? [1pt]
Is deze groep abels? [1pt]
Is deze groep een deelgroep van SO_2? [1pt]

Oplossing: De groep is D_4. Hij is niet cyklisch (het minimale aantal voortbrengers is 2), niet abels (spiegelingen een draaingen van 90° commuteren niet met elkaar) en geen deelgroep van $SO(2)$ (de spiegelingen hebben determinant -1).

Opgave 3 Zij $n \in \mathbb{N}$ een natuurlijk getal. Hoeveel elementen van orde n zijn er in O_2? **[3pt]** [1pt]
Laat zien dat de groep O_2 voortgebracht is door elementen van orde 2. [1pt]
Welke van de volgende groepen zijn abels: U_1, U_2, SU_2, SU_3, O_1, O_2, SO_2, SO_3? [1pt]

Oplossing: Als $n = 2$, zijn er oneingid veel; als $n \geq 3$, zijn er $\varphi(n)$. De elementen uit O_2 zijn spiegelingen en draaingen; de spiegeling hebben orde 2, en ieder draaing is een product van twee spiegelingen: $\left(\begin{smallmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{smallmatrix}\right)$. De groepen U_1, O_1, SO_2 zijn abels en de andere niet.

Opgave 4 Zij $g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de volgende permutaties $g := (1,2)$, $h(x) := x + 1$. **[4pt]**
Voor $n \geq 1$, bereken $h^n g h^{-n}$. [1pt]
Wat is de orde van $g h^n g h^{-n}$? [hint: het hangt van n af] [2pt]
Zij $G := \langle g, h^2 \rangle$ de groep die door g en h^2 is voorgebracht. Is de actie van G op $\mathbb{Z}$ transitief? [1pt]

Oplossing: $h^n g h^{-n} = (n+1, n+2)$. Voor $n \geq 2$, heeft $g h^n g h^{-n} = (1,2)(n+1,n+2)$ orde 2. Voor $n = 1$, heeft $g h^n g h^{-n} = (1,2,3)$ orde 3. De actie is transitief want de baan van 1 bevat $g(1) = 2$ en $(h^2)^k(1) = 2k+1$ en $(h^2)^k(g(1)) = 2k+2$, en is dus gelijk aan het hele $\mathbb{Z}$.

Opgave 5 Zij G een groep en $k \in G$ een element. Laat zien dat de afbeelding **[4pt]**

$$\begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto kgk^{-1} \end{aligned}$$

altijd en automorfisme is. [1pt]
Zij $g := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ en $h := \left(\begin{smallmatrix} cos(2\pi/n) & -sin(2\pi/n) \\ sin(2\pi/n) & cos(2\pi/n) \end{smallmatrix}\right)$ de twee voortbrengers van de dihedrale groep D_n.
Wat is de orde van het element gh? [1pt]
Laat zien dat $gh = kgk^{-1}$ voor een goed gekozen element $k \in SO_2$. [1pt]
Definiëert $g \mapsto gh$, $h \mapsto h$ een automorfisme van D_n? [1pt]

Oplossing: Het is een homomorfisme want $gh \mapsto k(gh)k^{-1} = (kgk^{-1})(khk^{-1})$ en het is inverteerbar (met inverse $g \mapsto k^{-1}gk$), dus het is een automorfisme. gh is een spiegeling, en heeft dus order 2. Voor $\theta = 2\pi/2n$, heeft $k = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ de gewensde eigenschap. De afbeelding $g \mapsto gh$, $h \mapsto h$ is van de vorm $x \mapsto kxk^{-1}$ (met k zo als boven) en is dus een automorfisme.

Opgave 6 Bekijk de actie **[3pt]**

$$\alpha : S_n \to S_{n+2}$$

van de symmetrische groep S_n op de verzameling $X := \{1, 2, 3, \dots, n+2\}$ die de transpositie $(i, j) \in S_n$ naar $(i, j)(n+1, n+2) \in S_{n+2}$ stuurt. In andere woorden $\alpha((i, j)) := (i, j)(n+1, n+2)$.
Is deze actie transitief? Wat zijn de banen van deze actie? [1pt]
Is deze actie vrij? [1pt]
Wat zijn de vaste punten in X van het element $(1, 2, 3, \dots, n) \in S_n$? [1pt]

Oplossing: De banen zijn $\{1, 2, \dots, n\}$ en $\{n+1, n+2\}$: de actie is niet transitief. Als de actie vrij was, zouden de banen cardinaliteit $|S_n|$ hebben. Dat is niet het geval (behalve als $n \leq 2$), en de actie zijn dus niet vrij. Als $(1, 2, 3, \dots, n)$ in A_n zit (dat wil zeggen, als n oneven is), zijn $n+1$ en $n+2$ vaste punten; anders, zijn er geen vaste punten.