Oefenentamen

Opgave 1 Bewijs de volgende bewering of zijn tegengestelde:

> *"Voor ieder groep G van orde 125, er bestaat en surjectief homomorfisme van G naar een groep van orde 25."*

Oplossing:

Opgave 2 Wat is de definitie van "2-Sylow deelgroep"?
Zij $n \geq 3$ een natuurlijk getal. Wat is de orde van een 2-Sylow deelgroep van D_n?
Geef een voorbeeld van een 2-Sylow deelgroep $S \subset D_n$.
Maak een lijst van alle 2-Sylow deelgroepen van D_n
Hoeveel 2-Sylow deelgroepen zijn er in D_n?

Oplossing:

Opgave 3 Bewijs de volgende bewering of zijn tegengestelde:

> *"Voor ieder groep G van orde 10, er is en surjectief homomorfisme van G naar een groep van orde 2."*

Hint: gebruik de Sylow stellingen.

Oplossing:

Opgave 4 Wat is de definitie van een normaal deelgroep?
Zij $n < m$ twee natuurlijke getallen.
Laat zien dat als $n|m$, dan is de dihedrale groep D_n en deelgroep van D_m.
Is dit een normaal deelgroep? [hint: het antwoord hangt van de keuze van n en m af]

Oplossing:

Opgave 5 Laat zien dat als ieder niet triviale element van G orde twee heeft, dan G is abelsch.

Oplossing:

Opgave 6 Zij G een groep van orde 120. Door de stellingen van Sylow te gebruiken, laat zien dat het aantal homomorfismen $\mathbb{Z}_5 \to G$ door 5 deelbaar is.

Oplossing:

Opgave 7 *[bijzonder moeijlijk]*
Gebruik de definitie $Q := \langle i, j \mid i^2 = j^2 = (ij)^2 \rangle$ om de relatie $i^4 = e$ te laten zien.

Oplossing: