

**Deeltentamen Groepentheorie (WISB221).**

A. Henriques, Jan 2013.

Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

---

**Opgave 1** Laat zien dat de enige groep waarvoor de conjugatie actie van  $G$  op zichzelf transitief is, de triviale groep is. [2pt]

**Opgave 2** Zij  $G$  een groep, en zij  $H_1, H_2 < G$  twee deelgroepen. [3pt]

• Laat zien, door een voorbeeld te geven, dat  $H_1H_2$  geen deelgroep van  $G$  hoeft te zijn. [1pt]

• Laat zien: als  $H_1$  een normale deelgroep van  $G$  is, dan is  $H_1H_2$  wel een deelgroep van  $G$ . [2pt]

**Opgave 3** Hoeveel elementen heeft de abelianisatie van de quaternionen groep  $Q$ ? [3pt] [2pt]

Aan welke bekende groep is deze isomorf? [1pt]

**Opgave 4** De dihedrale groep  $D_4 = \{(\begin{smallmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{smallmatrix})\}$  werkt op de verzameling  $X := \{(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}) \mid a, b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}\}$  door matrix vermenigvuldiging. [3pt]

$$X = \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

• Hoeveel banen heeft deze actie? [1pt]

• Wat is de stabilizator van  $(1, 1) \in X$ ? [1pt]

• Wat zijn de vaste punten van het element  $(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}) \in D_4$ ? [1pt]

**Opgave 5** Zij  $G$  een groep van orde 100. [2pt]

Hoeveel 5-Sylow deelgroepen zijn er in  $G$ ? [1pt]

Laat zien dat ieder 5-Sylow deelgroep normaal is in  $G$ . [1pt]

**Opgave 6** Laat zien dat de volgende groep niet cyclisch is: [2pt]

$$G = \langle x, y \mid x^2, y^2 \rangle$$