Tentamen Groepentheorie WISB221 op dinsdag 4.11.2014, 13:30 - 16:30

Universiteit Utrecht

The English version of the exam is on pages 3/4. Je kan het tentamen in het Engels of in het Nederlands maken. De opgaven staan in het Nederlands op pp. 1/2 en in het Engels op pp. 3/4.

Schrijf je naam en studentennummer op ieder blad dat je inlevert. Gebruik voor iedere opgave een nieuw blad.

Geef niet enkel antwoorden, laat ook de redenering zien die tot het antwoord leidt.

Het is *niet* toegestaan rekenmachines, computers, telefoons, boeken, handouts en aantekeningen, etc. te gebruiken. Het is wel toegestaan om volgende ontbinding te gebruiken: $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$.

Opgave 1. Beantwoord de volgende vragen en beargumenteer dat het antwoord klopt:

`6pt` (a) Wat is het teken van de permutatie

$$\sigma := (1\,2)(2\,3)\cdots(2012\,2013)(2013\,2014)$$

in S_{2014}?

`6pt` (b) Herschrijf de permutatie uit 1(a) als product van disjuncte cykels.

`6pt` (c) Schrijf de diëdergroep D_8 als $\{e, r, \ldots, r^7, s, rs, \ldots, r^7s\}$ voor $r, s \in D_8$ met $r^8 = s^2 = e$ en $rsr = s$. Welke van deze 16 elementen is $r^4s^{11}r^{2014}$?

`6pt` (d) Geef een element van $\mathrm{O}_3(\mathbf{R})$ dat niet tot $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ behoort en dat niet een diagonale matrix is.

Opgave 2. Bewijs of weerleg:

`6pt` (a) Als H een deelverzameling is van een groep G en H is een vereniging van conjugatie-klassen van G, dan is H een normale ondergroep van G.

`6pt` (b) Het directe product $G \times H$ van twee niet-triviale groepen G en H is nooit enkelvoudig.

`6pt` (c) Er bestaat een enkelvoudige groep van orde $3 \cdot 2014$.

`6pt` (d) De doorsnede $H \cap K$ van twee normale ondergroepen H en K van een groep G is een normale ondergroep van G.

`6pt` (e) Als $\varphi\colon G \to H$ een groepshomomorfisme is, dan is $x \ker\varphi = \{g \in G\colon \varphi(g) = \varphi(x)\}$ voor alle $x \in G$.

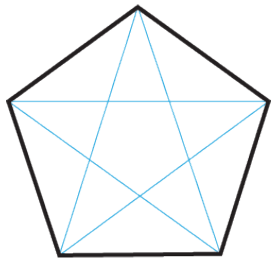
`6pt` (f) Het centrum Z van een groep G is $Z = \{x \in G\colon xg = gx \text{ voor alle } g \in G\}$. Als G/Z cyclisch is, dan is G abels.

[Zie ommezijde]

Opgave 3. Ter herinnering: D_5 is de groep van rotatiesymmetrieën van een regelmatige vijfhoek in de ruimte.

`10pt` (a) Geef de conjugatieklassen in D_5 en bewijs dat je bewering klopt.

`10pt` (b) Stel dat $n \geq 1$ een geheel getal is. Op hoeveel verschillende manieren, op de actie van D_5 na, kan je de vijf diagonalen van een regelmatige vijfhoek inkleuren met n kleuren? Het plaatje hieronder laat een vijfhoek zien met zijn vijf diagonalen.



`10pt` **Opgave 4.** De symmetrische groep S_n en de diëdergroep $D_{n!/2}$ hebben allebei orde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$. Bepaal exact voor welke gehele getallen $n \geq 2$ deze twee groepen isomorf zijn, en bewijs je antwoord.

Je kan punten halen (niet meer dan `5pt`) door te bewijzen of weerleggen dat $S_n \cong D_{n!/2}$ voor verschillende (kleine) $n \geq 2$.

`10pt` **Opgave 5.** Stel dat p een priemgetal is. Bewijs dat de orde van een eindige groep G niet deelbaar is door p dan en slechts dan als de afbeelding $G \to G \colon x \mapsto x^p$ een bijectie is.

[Einde]

Group Theory Exam WISB221 on Tuesday 4 Nov 2014, 13:30 - 16:30

Universiteit Utrecht

De Nederlandse versie van het tentamen staat op pagina 1/2. You can do the exam in Dutch or in English. The questions are displayed in Dutch on page 1/2 and in English on page 3/4.

Write your name and student number on every solution page that you hand in. Use a new page for every question.

Don't just provide the answer, but also show the reasoning that leads to the answer.

You are *not* allowed to use calculators, computers, phones, books, handouts and notes, etc. You are allowed to use the following factorisation: $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$.

Question 1. Answer the following questions and argue why your answer is correct:

6pt (a) What is the sign of the permutation

$$\sigma := (1\,2)(2\,3)\cdots(2012\,2013)(2013\,2014)$$

in S_{2014}?

6pt (b) Rewrite the permutation from 1(a) as a product of disjoint cycles.

6pt (c) Representing the dihedral group D_8 as $\{e, r, \ldots, r^7, s, rs, \ldots, r^7 s\}$ for $r, s \in D_8$ with $r^8 = s^2 = e$ and $rsr = s$, which of these 16 elements is $r^4 s^{11} r^{2014}$?

6pt (d) Write down an element of $\mathrm{O}_3(\mathbf{R})$ that is not in $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ and that is not a diagonal matrix.

Question 2. Prove or disprove:

6pt (a) If H is a subset of a group G that is a union of conjugacy classes of G, then H is a normal subgroup of G.

6pt (b) The direct product $G \times H$ of two non-trivial groups G and H is never a simple group.

6pt (c) There exists a simple group of order $3 \cdot 2014$.

6pt (d) The intersection $H \cap K$ of two normal subgroups H and K of a group G is a normal subgroup of G.

6pt (e) If $\varphi\colon G \to H$ is a group homomorphism, then $x \ker \varphi = \{g \in G\colon \varphi(g) = \varphi(x)\}$ for any $x \in G$.

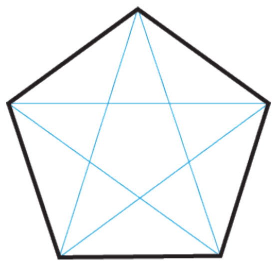
6pt (f) The center Z of a group G is $Z = \{x \in G\colon xg = gx \text{ for all } g \in G\}$. If G/Z is cyclic, then G is abelian.

[Please turn over]

Question 3. Recall that D_5 is the group of rotational symmetries of a regular pentagon in 3-space.

10pt (a) List the conjugacy classes in D_5 and prove that your statement is correct.

10pt (b) Let $n \geq 1$ be an integer. In how many different ways, up to the action of D_5, can you color the five diagonals of a regular pentagon with n colors? The picture below shows a regular pentagon with its five diagonals.



10pt **Question 4.** The symmetric group S_n and the dihedral group $D_{n!/2}$ are both of order $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$. Determine exactly for which integers $n \geq 2$ these two groups are isomorphic, and prove your answer.

You can get partial credit (no more than 5pt) by proving or disproving $S_n \cong D_{n!/2}$ for various different (small) $n \geq 2$.

10pt **Question 5.** Let p denote a prime number. Prove that the order of a finite group G is not divisible by p if and only if the map $G \to G \colon x \mapsto x^p$ is a bijection.

[The End]